CH I : Logique et raisonnements mathématiques

Dans ce chapitre, on introduit la syntaxe et la sémantique d'éléments de base du langage mathématique. L'objectif est double :

× pouvoir comprendre et écrire des phrases mathématiques simples,

× donner des bases rigoureuses afin de pouvoir démontrer ce type de phrases mathématiques.

I. Propositions mathématiques

Définition *Proposition mathématique*
On appelle **proposition mathématique** un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).

Exemple

- Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

  a) $1+1=2$
  Cette proposition est vraie.

  b) $1+1=3$
  Cette proposition est fausse.

  c) $\ln(1)=1$
  Cette proposition est fausse.

- Par contre, $1+1-2$ et $(\sqrt{18})^3$ ne sont pas des propositions puisqu'on ne peut leur attribuer de valeur de vérité. Ce sont des expressions arithmétiques dont le résultat est un réel.

Il est à noter qu'une proposition mathématique peut comporter des variables. En conséquence, il est possible que la valeur de vérité d'une proposition dépende du choix de ces variables.

Exemple

- Les énoncés suivants sont des propositions dont la valeur de vérité dépend du choix des variables.

  a) $x+2 \geqslant 4$

  × cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 2,

  × cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 2.

  b) $\sqrt{x^2}=x$

  × cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 0,

  × cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 0.

  c) $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$
  Pour connaître la valeur de vérité cette proposition, on aimerait la simplifier, en commençant par se débarrasser de l'opérateur $\sqrt{\cdot}$.
  Une telle démarche est périlleuse : si on reprend la proposition précédente : $\sqrt{x^2}=x$, une élévation au carré de part et d'autre du symbole d'égalité fournit l'expression : $x^2=x^2$, qui est vraie pour tout x réel !
  L'élévation au carré n'est donc pas un opérateur neutre en terme de valeur de vérité (nous reviendrons plus tard sur ce point).
  Sans entrer dans les détails, on peut remarquer que :

  × si $x=0$, la proposition est vraie pour tout $y \geqslant 0$,

  × si $y=0$, la proposition est vraie pour tout $x \geqslant 0$,

  × si $x<0$ et $y<0$, la proposition est fausse.

- Par contre, $10^x - (\sqrt{y})$ n'est pas une proposition. C'est une expression arithmétique dont le résultat est un réel.

On peut nommer une proposition. Si elle dépend d'une variable explicitement donnée, on fera apparaître cette dépendance. Par exemple, on pourra noter $p(x,y)$ la proposition $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$.

II. Connecteurs logiques

II.1. Conjonction

Définition *Conjonction*

Soient p et q sont deux propositions mathématiques.

- On note p `ET` q la proposition qui est :
  - × vraie quand p et q sont simultanément vraies,
  - × fausse sinon.
    Autrement dit, une conjonction p `ET` q est fausse si (au moins) l'une des deux propositions p ou q qui la compose est fausse.
- L'opérateur `ET` permet de combiner deux propositions pour former une nouvelle proposition.

Exemple

Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

a) $(x+2 \geqslant 4)$ `ET` $(1+1=3)$
La proposition $1+1=3$ étant fausse indépendamment de la vealeur de x, cette conjonction est fausse pour tout x réel.

b) $(1+1=2)$ `ET` $(x+2 \geqslant 4)$
- × cette proposition est vraie pour tout $x \geqslant 2$,
- × cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout $x < 2$.

II.2. Disjonction

Définition *Disjonction*

Soient p et q sont deux propositions mathématiques.

- On note p `OU` q la proposition qui est :
  - × fausse quand p et q sont simultanément fausses,
  - × vraie sinon.
    Autrement dit, une disjonction p `OU` q est vraie si (au moins) l'une des deux propositions p ou q qui la compose est vraie.
- L'opérateur `OU` permet de combiner deux propositions pour former une nouvelle proposition.

Exemple

Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

a) $(x+2 \geqslant 4)$ `OU` $(1+1=3)$
La proposition $1+1=3$ étant fausse indépendamment de la valeur de x, cette disjonction est :
- × vraie lorsque $(x+2 \geqslant 4)$ l'est *i.e.* pour tout $x \geqslant 2$,
- × fausse sinon *i.e.* pour tout $x < 2$.

b) $(1+1=2)$ `OU` $(x+2 \geqslant 4)$
La proposition $1+1=2$ étant vraie indépendamment de la valeur de x, cette disjonction est vraie pour tout x réel.

Remarque

Il ne faut pas confondre cette définition du `OU` avec celle utilisée dans le langage naturel. En effet, lorsqu'on vous demande au restaurant si vous souhaitez du fromage ou du dessert, le serveur retire implicitement la possibilité de vous apporter les deux. Le « ou » du langage naturel correspond en fait au `XOR` (« ou » exclusif). Pour p et q deux propositions, p `XOR` q est vérifiée si seulement l'une des deux propositions p et q est vraie et fausse sinon.

Propriété des opérateurs `ET` et `OU`

1) p `ET` $(q$ `OU` $r)$ a même valeur de vérité que $(p$ `ET` $q)$ `OU` $(p$ `ET` $r)$

2) p `OU` $(q$ `ET` $r)$ a même valeur de vérité que $(p$ `OU` $q)$ `ET` $(p$ `OU` $r)$

(dire que deux propositions a et b ont même valeur de vérité signifie qu'elles sont fausses en même temps et qu'elles sont vraies en même temps)

Démonstration.
Nous traitons seulement le ***1)***, le ***2)*** est laissé en exercice.
Pour montrer que deux propositions a et b ont même valeur de vérité, nous allons procéder comme suit :

(i) nous montrons que si a est vraie alors b l'est aussi.

(ii) nous montrons que si a est fausse alors b l'est aussi.

Ceci démontre que les propositions sont vraies en même temps et fausses en même temps.
Revenons à la démonstration consistant à démontrer que p `ET` $(q$ `OU` $r)$ a même valeur de vérité que $(p$ `ET` $q)$ `OU` $(p$ `ET` $r)$.

(i) Supposons que p `ET` $(q$ `OU` $r)$ est vraie.
Ceci signifie que les propositions p et q `OU` r sont vraies toutes les deux.
Ainsi, l'une (au moins) des propositions q ou r est vraie.
On procède alors par disjonction de cas sur la valeur de vérité (par exemple) de q.

- si q est vraie : alors p `ET` q est vraie.
  Ainsi, la proposition $(p$ `ET` $q)$ `OU` $(p$ `ET` $r)$ est vraie.
- si q est fausse : alors comme q `OU` r est vraie, r est forcément vraie.
  On en déduit que p `ET` r est vraie.
  Ainsi, la proposition $(p$ `ET` $q)$ `OU` $(p$ `ET` $r)$ est vraie.

La proposition $(p$ `ET` $q)$ `OU` $(p$ `ET` $r)$ est donc vraie (puisque vraie indépendamment de la valeur de q).

(ii) Supposons que p `ET` $(q$ `OU` $r)$ est fausse.
Ceci signifie que l'une (au moins) des propositions p ou q `OU` r est fausse.
On procède alors par disjonction de cas sur la valeur de vérité (par exemple) de p.

- si p est vraie : alors q `OU` r est fausse. Ainsi, q et r sont fausses.
  On en déduit que p `ET` q et p `ET` r sont fausses.
  Ainsi, la proposition $(p$ `ET` $q)$ `OU` $(p$ `ET` $r)$ est fausse.
- si p est fausse : alors p `ET` q est fausse et p `ET` r est fausse.
  Ainsi, la proposition $(p$ `ET` $q)$ `OU` $(p$ `ET` $r)$ est fausse.

La proposition $(p$ `ET` $q)$ `OU` $(p$ `ET` $r)$ est donc fausse (puisque fausse indépendamment de la valeur de p). $\square$

Remarque

- Notez que ***(i)*** et ***(ii)*** permettent d'affirmer que :

  (ii') si b est vraie alors a est vraie.
  Si on suppose b vraie, alors, si a était fausse, à l'aide de ***(ii)*** on pourrait conclure que b est fausse, ce qui contredit l'hypothèse « b est vraie ».

  (i') si a est fausse alors b est fausse.
  Si on suppose a fausse, alors, si b était vraie, à l'aide de ***(i)*** on pourrait conclure que b est vraie, ce qui contredit l'hypothèse « a est fausse ».
- Réciproquement, en raisonnant de même, on peut prouver que ***(ii')*** permet de démontrer ***(ii)*** et ***(i')*** permet de démontrer ***(i)***.
- On en conclut que l'on peut remplacer ***(i)*** par ***(i')*** et ***(ii)*** par ***(ii')*** lorsque l'on souhaite démontrer que deux propositions ont même valeur de vérité.

II.3. Négation

Définition *Négation*

Soit p une proposition mathématique.

- On note `NON`(p) la proposition qui est :
  - vraie lorsque p est fausse,
  - fausse lorsque que p est vraie.

Exemple

a) `NON`$(x + 2 \geqslant 4)$ est une proposition qui est :
- vraie si $x + 2 \geqslant 4$ est fausse *i.e.* si pour tout x tel que $x + 2 < 4$,
- fausse si $x + 2 \geqslant 4$ est vraie *i.e.* si pour tout x tel que $x + 2 \geqslant 4$.

En fait, `NON`$(x + 2 \geqslant 4)$ a même valeur de vérité que $(x + 2 < 4)$.

b) De même, `NON`$(\sqrt{x^2} = x)$ a même valeur de vérité que $(\sqrt{x^2} \neq x)$.

Propriété de la négation

1) $\texttt{NON}(p\ \texttt{ET}\ q)$ a même valeur de vérité que $(\texttt{NON}(p)\ \texttt{OU}\ \texttt{NON}(q))$.

2) $\texttt{NON}(p\ \texttt{OU}\ q)$ a même valeur de vérité que $(\texttt{NON}(p)\ \texttt{ET}\ \texttt{NON}(q))$.

3) $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p))$ a même valeur de vérité que p.

Les énoncés ***1)*** et ***2)*** sont appelées lois de De Morgan.

Démonstration.

1) (i) Supposons que $\texttt{NON}(p\ \texttt{ET}\ q)$ est vraie.
Alors $p\ \texttt{ET}\ q$ est fausse. Ainsi, l'une (au moins) des deux propositions p ou q est fausse.
On procède alors par disjonction de cas sur la valeur de vérité (par exemple) de p.

- × si p est vraie : alors q est fausse.
  On en déduit que $\texttt{NON}(q)$ est vraie.
  Ainsi, la proposition $(\texttt{NON}(p)\ \texttt{OU}\ \texttt{NON}(q))$ est vraie.
- × si p est fausse : alors $\texttt{NON}(p)$ est vraie.
  Ainsi, la proposition $(\texttt{NON}(p)\ \texttt{OU}\ \texttt{NON}(q))$ est vraie.

La proposition $(\texttt{NON}(p)\ \texttt{OU}\ \texttt{NON}(q))$ est donc vraie (puisque vraie indépendamment de la valeur de vérité de p.

(ii) Supposons que $\texttt{NON}(p\ \texttt{ET}\ q)$ est fausse.
Alors $p\ \texttt{ET}\ q$ est vraie. Ainsi, les deux propositions p et q sont vraies.
On en déduit que $\texttt{NON}(p)$ et $\texttt{NON}(q)$ sont fausses toutes les deux.
Ainsi, la proposition $(\texttt{NON}(p)\ \texttt{OU}\ \texttt{NON}(q))$ est fausse.

2) Laissé en exerice.

3) (i) Si $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p))$ est vraie alors $\texttt{NON}(p)$ est fausse et donc p est vraie.

(ii) Si $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p))$ est fausse alors $\texttt{NON}(p)$ est vraie et donc p est fausse.

□

II.4. Implication

II.4.a) Définition et schéma de démonstration

Définition *Implication*

Soient p et q deux propositions mathématiques.

- On note $p \Rightarrow q$ la proposition qui est :
  - × vraie si q est vraie à chaque fois que p l'est,
  - × fausse sinon.
- Lorsque la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie, on dira que p implique q (la proposition p entraîne la proposition q).
- L'implication $q \Rightarrow p$ est appelée **réciproque** de l'implication $p \Rightarrow q$.
- Lorsque p implique q, on dira que :
  - × p est une **condition suffisante** de q : en effet, pour que la proposition q soit vraie, il suffit que p le soit.
  - × q est une **condition nécessaire** de p : en effet, pour que p soit vraie, il est nécessaire que q le soit.
    (si q n'est pas vraie alors p ne peut être vraie : sinon, comme $p \Rightarrow q$, la proposition q serait vraie !)

Schéma de démonstration

Pour montrer $a \Rightarrow b$, on peut opter pour la démonstration directe. Ceci consiste à montrer que b est vraie dès que a l'est. On rédigera comme suit.

Démo de $a \Rightarrow b$ par méthode directe

```
Supposons a.
Alors ...(démo dépendant de a) ...et donc b.
Ce qui démontre a ⇒ b.
```

Application sur un exemple

Propriété *Transitivité de l'implication*

Soient p, q et r des propositions mathématiques.

$$\boxed{((p \Rightarrow q) \texttt{ ET } (q \Rightarrow r)) \ \Rightarrow \ (p \Rightarrow r)}$$

Cet énoncé se lit : **si** p implique q et q implique r **alors** p implique r.

Démonstration.
Si on reprend le schéma de démonstration précédent, le rôle de a est ici joué par $(p \Rightarrow q)$ `ET` $(q \Rightarrow r)$ et le rôle de b est joué par $p \Rightarrow r$.

- Supposons que $(p \Rightarrow q)$ `ET` $(q \Rightarrow r)$ est vraie.

  Démontrons alors que $p \Rightarrow r$ est vraie.
  On suppose que p est vraie.
  Comme $(p \Rightarrow q)$ `ET` $(q \Rightarrow r)$ est vraie, $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow r$ le sont aussi.
  × comme p est vraie et $p \Rightarrow q$, la proposition q est vraie,
  × comme q est vraie et $q \Rightarrow r$, la proposition r est vraie.

  Ce qui démontre $p \Rightarrow q$ et termine la démonstration. □

Remarque

- Mettons en avant deux éléments de la définition :
  × si l'on sait que p implique q et que p est vraie, alors on a forcément q.
  × si l'on sait que p implique q et que p est fausse, il faut bien comprendre que la définition n'impose rien quand à la valeur de vérité de q.
- Pour bien comprendre ce mécanisme, étudions l'énoncé suivant :
  « **s'il** fait beau **alors** j'irai au parc »
  Deux cas se présentent :
  × soit il fait beau et je me dois d'aller au parc.
  × soit il ne fait pas beau. Dans ce cas, j'ai le choix. Soit je décide malgré tout d'aller au parc (avec mon parapluie), soit je décide de rester chez moi : cela ne remet pas en cause la véracité de l'énoncé précédent.
- À retenir : p implique q correspond à l'énoncé « **si** p **alors** q ».

II.4.b) Contraposée et schéma de démonstration associé

Propriété *Contraposée*

Soient p et q sont deux propositions mathématiques.

- Les propositions $p \Rightarrow q$ et $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$ ont même valeur de vérité.
- La proposition $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$ est appelée **contraposée** de $p \Rightarrow q$.

Soit p et q deux propositions.
Il ne faut surtout pas confondre les propositions :

- $q \Rightarrow p$: la proposition réciproque de $p \Rightarrow q$.
- $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$: la proposition contraposée de $p \Rightarrow q$.

Schéma de démonstration

Démontrer $a \Rightarrow b$ par contraposée consiste à démontrer que la proposition (équivalente) $\texttt{NON}(b) \Rightarrow \texttt{NON}(a)$ est vraie.

Démo de $a \Rightarrow b$ par contraposée

`Supposons` $\texttt{NON}(b)$.
`Alors ...`*(démo dépendant de b)* `...et donc` $\texttt{NON}(a)$.
`Ce qui démontre` $a \Rightarrow b$.

Exercice

Pour x élément de $\mathbb{R}$, montrer que : $((\forall \varepsilon > 0), x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x \leqslant 0$.
On procédera par contraposée.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par contraposée que si n^2 est pair alors n est pair.

Intérêt de la démonstration par contraposée

Pour démontrer $p \Rightarrow q$, il est parfois utile de partir d'une hypothèse sur q (supposer $\texttt{NON}(q)$ en l'occurrence) pour démontrer un but dépendant de p (montrer $\texttt{NON}(p)$). C'est ce que permet le raisonnement par contraposée.

II.4.c) Expression de $p \Rightarrow q$ à l'aide des opérateurs NON et OU

Propriété

Soient p et q sont deux propositions mathématiques.

La proposition $p \Rightarrow q$ a même valeur de vérité que la proposition $\texttt{NON}(p)$ OU q.

Démonstration.
Pour démontrer que ces deux propositions ont même valeur de vérité, nous montrons les points ***(i)*** et ***(ii')***.

(i) Supposons que la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie.
Procédons par disjonction de cas sur la valeur de vérité de p.

- si p est vraie : alors, comme $p \Rightarrow q$, on a que q est vraie.
Ainsi, $\texttt{NON}(p)$ OU q est vraie.
- si p est fausse : alors $\texttt{NON}(p)$ est vraie. Ainsi, $\texttt{NON}(p)$ OU q est vraie.

(ii') Supposons que la proposition $\texttt{NON}(p)$ OU q est vraie.
Démontrons alors que $p \Rightarrow q$ est vraie.

Supposons que p est vraie.
Alors $\texttt{NON}(p)$ est fausse.
Comme $\texttt{NON}(p)$ OU q est vraie, on peut donc conclure que q est vraie.

On a donc démontré que $p \Rightarrow q$ est vraie. □

Application : négation de $p \Rightarrow q$

Propriété

Soient p et q sont deux propositions mathématiques.

- La proposition $\texttt{NON}(p \Rightarrow q)$ a même valeur de vérité que la proposition p ET $\texttt{NON}(q)$.

Démonstration.
La proposition $\texttt{NON}(p \Rightarrow q)$ a même valeur de vérité que $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p)$ OU $q)$.
De plus, $\texttt{NON}(\texttt{NON}(p)$ OU $q)$ a même valeur de vérité que p ET $\texttt{NON}(q)$. □

Exercice
On considère la proposition « s'il pleut, mon jardin est mouillé ».
Quelle est sa négation ?

a. « s'il ne pleut pas, mon jardin n'est pas mouillé »

b. « s'il ne pleut pas, mon jardin est mouillé »

c. « s'il pleut, mon jardin n'est pas mouillé »

d. « si mon jardin n'est pas mouillé, il ne pleut pas »

e. « il pleut et mon jardin n'est pas mouillé »

f. autre réponse.

II.5. L'opérateur d'équivalence

II.5.a) Définition et schéma de démonstration

Définition *Équivalence*

Soient p et q sont deux propositions mathématiques.

- On note $p \Leftrightarrow q$ la proposition qui est :
  - vraie si $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ sont vraies,
  - fausse sinon.
- Lorsque $p \Leftrightarrow q$ est vraie, on dira que p est **équivalent** q.

Remarque

- Lorsque p est équivalent à q on a :
  - p implique q donc p est une condition suffisante de q.
    (q est une condition nécessaire de p)
  - q implique p donc p est une condition nécessaire de q.
    (q est une condition suffisante de p)

  On dira donc que p est une **condition nécessaire et suffisante** de q
  (q est une condition nécessaire et suffisante de p)
  ou encore que p est vraie **si et seulement si** q est vraie.

- Dire que p est équivalent à q revient à dire que p et q ont même valeur de vérité. En effet :
  - × le point ***(i)*** revient à démontrer $p \Rightarrow q$,
  - × le point ***(ii')*** revient à démontrer $q \Rightarrow p$.

Exemples précédents

Soient p, q et r des propositions mathématiques.

1) $\boxed{p \texttt{ ET } (q \texttt{ OU } r) \ \Leftrightarrow\ (p \texttt{ ET } q) \texttt{ OU } (p \texttt{ ET } r)}$

2) $\boxed{p \texttt{ OU } (q \texttt{ ET } r) \ \Leftrightarrow\ (p \texttt{ OU } q) \texttt{ ET } (p \texttt{ OU } r)}$

3) $\boxed{\texttt{NON}(p \texttt{ ET } q) \ \Leftrightarrow\ \texttt{NON}(p) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q)}$

4) $\boxed{\texttt{NON}(p \texttt{ OU } q) \ \Leftrightarrow\ \texttt{NON}(p) \texttt{ ET } \texttt{NON}(q)}$

5) $\boxed{\texttt{NON}(\texttt{NON}(p)) \ \Leftrightarrow\ p}$

Schéma de démonstration

Démontrer que $a \Leftrightarrow b$ consiste à démontrer tout d'abord que $a \Rightarrow b$ *i.e.* que a est une condition suffisante de b (sens direct) puis que $b \Rightarrow a$ *i.e.* que a est une condition nécessaire de b (sens réciproque). On dit alors qu'on procède par **double implication**.

Démo de $a \Leftrightarrow b$ par double implication

```
(⇒) Supposons a.
On a alors ...(démo dépendant de a) ...et donc b.
Ce qui démontre a ⇒ b.

(⇐) Supposons b.
On a alors ...(démo dépendant de b) ...et donc a.
Ce qui démontre b ⇒ a.

Et ainsi, a ⇔ b.
```

II.5.b) Négation d'une équivalence

- La propostion $\texttt{NON}(p \Leftrightarrow q)$ est équivalente à $\texttt{NON}(p \Rightarrow q \texttt{ ET } q \Rightarrow p)$, qui est elle-même équivalente à $\texttt{NON}(p \Rightarrow q) \texttt{ OU } \texttt{NON}(q \Rightarrow p)$.
- Ainsi, démontrer que $p \Leftrightarrow q$ n'est pas vérifié revient à démontrer que l'une (au moins) des deux implications $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ n'est pas vérifiée.

III. Quantificateurs

III.1. Quantificateur universel

Définition *Quantificateur universel*

Soit E un ensemble, et p une proposition comportant une variable x.

- On note $\forall x \in E,\ p(x)$ la proposition qui est :
  - × vraie si pour tout élément x de l'ensemble E, $p(x)$ est vraie,
  - × fausse sinon.
    Autrement dit qui est fausse s'il existe au moins un élément x de l'ensemble E tel que la proposition $p(x)$ est fausse.
- Lorsque $(\forall x \in E,\ p(x))$ est vraie, on dit que quelque soit x élément E (ou pour tout élément x de E), $p(x)$ est vérifiée.

Schéma de démonstration

Pour démontrer un énoncé universellement quantifié *i.e.* un énoncé du type $(\forall x \in E,\ p(x))$, il faut rédiger comme suit.

Démo de $\forall x \in E,\ p(x)$

```
Soit x élément de E.
Alors ...(démo dépendant de p) ...et donc p(x) est vraie.
Ceci démontre que p(x) est vraie pour tout x de E.
```

Exercice

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

III.2. Quantificateur existentiel

Définition *Quantificateur existentiel*
Soit E un ensemble, et p une proposition comportant une variable x.

- On note $\exists x \in E,\ p(x)$ la proposition qui est :
  - × vraie s'il existe au moins un élément x de l'ensemble E tel que la proposition $p(x)$ est vraie.
  - × fausse sinon.
    Autrement dit qui est fausse s'il n'existe aucun élément x de E tel que la proposition $p(x)$ est vraie.
- On note aussi $\exists ! x \in E,\ p(x)$ la proposition qui est :
  - × vraie s'il existe **un unique** élément x de l'ensemble E tel que la proposition $p(x)$ est vraie.
  - × fausse sinon.
    Autrement dit qui est fausse :
    - soit s'il n'existe aucun élément x de E tel que $p(x)$ est vraie,
    - soit s'il existe (au moins) deux éléments de E qui satisfont p.

Schéma de démonstration

Démontrer un énoncé existentiellement quantifié *i.e.* un énoncé du type $(\exists x \in E, p(x))$ consiste à exhiber un élément a de E qui vérifie la proposition p. Autrement dit, un élément tel que $p(a)$ est vraie.

Exemple
Pour démontrer la proposition : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 3$, il suffit d'exhiber un x réel tel que son carré vaut 3. On peut prendre par exemple $x = -\sqrt{3}$.
(on aurait pu prendre aussi $x = \sqrt{3}$)

III.3. Énoncés comportant plusieurs quantificateurs

Remarque
On peut écrire des énoncés comportant plus d'un quantificateur. Par exemple, l'énoncé : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$ signifie que tout élément réel x possède un opposé y. Notez que cet opposé y dépend de l'élément x initial.

- Les quantificateurs de types différents ne commutent pas en général. Par exemple, l'énoncé : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$ n'est pas équivalent au précédent. Elle énonce l'existence d'un élément qui serait l'opposé de tout réel. Évidemment, cette proposition est fausse.
- Les quantificateurs de même type commutent.

Exercice
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Que signifient les deux propositions suivantes ?

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leqslant M$

2) $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

Exercice
Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes définies sur $\mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls).

1) Tout entier est le carré d'un entier.

2) Tout entier a pour carré la somme des carrés de deux entiers.

3) Certains entiers ont pour carré la somme des carrés de deux entiers.

4) Aucun entier n'est plus grand que tous les autres.

Exprimer la négation de ces propositions.

III.4. Négation d'énoncés comportant des quantificateurs

III.4.a) Si la proposition contient un seul quantificateur

- La négation de $(\forall x \in E,\ p(x))$ a même valeur de vérité que la proposition : $(\exists x \in E,\ \texttt{NON}(p(x)))$. Autrement dit :

$$\boxed{\texttt{NON}(\forall x \in E,\ p(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in E,\ \texttt{NON}(p(x))}$$

Schéma de démonstration

Démontrer que la proposition $q : \forall x \in E,\ p(x)$ est fausse, c'est démontrer que $\texttt{NON}(q)$ est vraie. Or on a : $\texttt{NON}(q) : \exists x \in E,\ \texttt{NON}(p(x))$. Ainsi, il s'agit d'exhiber un élément u de E tel que $p(u)$ est fausse. Cet élément u est appelé un **contre-exemple** de la proposition q.

Exercice
Démontrer que la proposition suivante est fausse.

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad 2^{3^x}.(\ln(1-x)+1).(3x^3 + xe^x - 4) \geqslant 0$$

Il s'agit d'exhiber un contre-exemple. Or on remarque que :
× $2^{3^0} = 2^1 = 2$
× $\ln(1-0)+1 = \ln(1)+1 = 1$
× $30^3 + 0e^0 - 4 = -4$
et $2 \times 1 \times (-4) < 0$. L'élément $u = 0$ fournit un contre-exemple.

- La négation de $(\exists x \in E,\ p(x))$ a même valeur de vérité que la proposition $(\forall x \in E,\ \texttt{NON}(p(x)))$. Autrement dit :

$$\boxed{\texttt{NON}(\exists x \in E,\ p(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x \in E,\ \texttt{NON}(p(x))}$$

- Ainsi, pour nier une proposition qui commence par un quantificateur, on change le quantificateur et on nie la proposition qui le suit.

III.4.b) Si la proposition comporte plusieurs quantificateurs

Afin de nier une proposition comportant plusieurs quantificateurs, il suffit d'itérer la règle précédente.

Exemple
Soit p la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant M$.
Notons $q(x)$ la proposition : $\exists M \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant M$. On a alors :

$$p \ :\quad (\forall x \in \mathbb{R}),\ q(x)$$

Donc, en appliquant la règle précédente :

$$\texttt{NON}(p) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in \mathbb{R},\ \texttt{NON}(q(x))$$

et ainsi,

$$\texttt{NON}(p) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in \mathbb{R}, \forall M \in \mathbb{R}^+,\ f(x) > M$$

Exercice. (☆)
Établir la négation de la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y))$$

On peut procéder de manière automatique :

$$\begin{array}{cl} & \texttt{NON}(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y))) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R},\ \texttt{NON}(\forall y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y))) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \texttt{NON}(x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \ \texttt{ET}\ \texttt{NON}(f(x) \leqslant f(y))) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y)\ \texttt{ET}\ (f(x) > f(y)) \end{array}$$

(la proposition de départ signifie que la fonction f est croissante)

IV. Autres types de démonstrations rencontrées

IV.1. Démonstration par l'absurde

- Afin de démontrer une proposition r, on peut procéder par l'absurde. Ce raisonnement consiste à supposer que NON(v) est vraie, et montrer que cela mène à une contradiction.

Démo de v par l'absurde

```
Par l'absurde, on suppose que NON(v) est vraie.
Alors ...
Contradiction !
Ce qui démontre v.
```

- Ce type de raisonnement est adapté au cas ou la proposition v est une implication $v : a \Rightarrow b$. On rappelle que dans ce cas, NON(v) équivaut à NON(NON(a) OU b) *i.e.* à a ET NON(b). Pour montrer par l'absurde la proposition $a \Rightarrow b$, on rédigera comme suit.

Démo de $a \Rightarrow b$ par l'absurde

```
Par l'absurde, on suppose que a et NON(b) sont vérifiées.
Alors ...
Contradiction !
Ce qui démontre a ⇒ b.
```

Exercice
Pour x élément de $\mathbb{R}$, montrer que : $((\forall \epsilon > 0), x \leqslant \epsilon) \Rightarrow x \leqslant 0$.
On procédera par l'absurde.

Exercice
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que si n^2 est pair alors n est pair.

Intérêt de la démonstration par l'absurde
Lorsque l'on démontre une implication $a \Rightarrow b$ par l'absurde, on suppose à la fois a et NON(b). Ainsi, le raisonnement par l'absurde nous permet de bénéficier de deux hypothèses là où la démonstration directe et la démonstration par contraposée n'en ont qu'une.

IV.2. Démonstration à l'aide d'une disjonction de cas

Lorsqu'une proposition comporte une variable x prenant sa valeur sur un ensemble E, il peut être utile d'effectuer une **partition** de l'ensemble E. On étudiera alors les valeurs de vérité de la proposition pour chaque type de valeur que peut prendre x *i.e.* pour x appartenant successivement à chaque ensemble de la partition.

Exercice
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $n^2 - n$ est pair.

V. Avertissement

Les symboles de quantificateurs et connecteurs logiques servent à exprimer de manière rigoureuse et concise des propositions mathématiques. Il est tout à fait exclu d'utiliser ces symboles à des fins d'abréviation.

- ~~Démontrons qu'$\exists$ un élément x de $\mathbb{R}$ tel que ...~~
- ~~Ce qui prouve que, $\forall x$, la proposition ...~~