CH X : Limites et continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

Notations et définitions utiles

Définition *(notion d'intervalle)*

- Formellement, un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) telle que :

$$\boxed{\forall (u,v) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (u \leqslant x \leqslant v \ \Rightarrow \ x \in I)}$$

- De par cette définition, pour tout intervalle I non vide, on peut exhiber deux bornes telles que I est l'ensemble des éléments compris (au sens large ou strict) entre ses deux bornes. On peut distinguer deux cas.

  1) I est un intervalle à bornes finies $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

  $$]a,b[, \quad [a,b[, \quad]a,b], \quad [a,b],$$

  2) I est un intervalle possédant au moins une borne infinie :

  $$]-\infty,b[, \quad]-\infty,b], \quad]a,+\infty[, \quad [a,+\infty[, \quad]-\infty,+\infty[$$

- Les éléments a et b sont des réels appelés **bornes** (ou extrémités) **finies** de l'intervalle I.

Définition *(notion d'adhérence)*

- On appelle adhérence de l'intervalle I, et on note $\overline{I}$, l'intervalle I auquel on a rajouté ses bornes finies. Plus précisément, on a :

  1) si I à bornes finies $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: alors $\overline{I} = I \ \cup \ \{a,b\} = [a,b]$.
  ($\hookrightarrow$ vrai pour $I =]a,b[$, $I =]a,b]$, $I = [a,b[$, $I = [a,b]$)

  2) si I à borne(s) infinie(s) :
  - $\times$ si $I =]-\infty,b[$ ou $I =]-\infty,b]$, alors $\overline{I} =]-\infty,b]$,
  - $\times$ si $I =]a,+\infty[$ ou $I = [a,+\infty[$, alors $\overline{I} = [a,+\infty[$,
  - $\times$ si $I =]-\infty,+\infty[$, alors $\overline{I} =]-\infty,+\infty[$.

Notations du chapitre

- On considérera des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: $\boxed{f : I \to \mathbb{R}}$
- Parmi les points considérés, on distinguera les cas suivants :
  - $\times$ $x_0 \in I$: x_0 est un point de l'intervalle I,
  - $\times$ $x_0 \in \overline{I}$: x_0 est un point adhérent à l'intervalle I *i.e.* un point de I ou une extrémité de I (même si cette extrémité n'est pas un élément de I).

Définition *(notion de voisinage d'un point)*

Voisinage d'un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (f est une fonction définie sur I).

- On appelle **voisinage** (fermé) de x_0 tout segment de la forme : $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On appelle **voisinage épointé** (fermé) de x_0 tout ensemble de la forme $V \setminus \{x_0\}$ où V est un voissinage de x_0.
  Autrement dit, un voisinage épointé de x_0 est un ensemble de la forme : $[x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \ \cap \ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Remarque
On ne considère ici que des voisinages centrés en x_0. En général, un voisinage (fermé) de x_0 est un segment $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$ avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.
Autrement dit, c'est un segment qui contient x_0 et non réduit à $\{x_0\}$.

Définition *(notion de voisinage de l'infini)*

Voisinage de $+\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $+\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $+\infty$ tout intervalle de la forme : $[A, +\infty[$ où A est un réel tel que $A > 0$.
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Voisinage de $-\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $-\infty$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $-\infty$ tout intervalle de la forme : $]-\infty, B]$ où B est un réel tel que $B > 0$.
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $-\infty$ s'il existe $B > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap]-\infty, B]$.

Remarque

- La notion de voisinage permet de formaliser l'idée de propriété vérifiée « à proximité » d'un point x_0 / « à proximité » de l'infini.
- La notion de convergence pour les suites est définie par une propriété vérifiée à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [n_0, +\infty[$. Autrement dit, par une propriété vérifiée au voisinage de $+\infty$.

I. Notion de limite d'une fonction

I.1. Limite finie d'une fonction en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

I.1.a) Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet une **limite finie** au point x_0 s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

- On notera alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque

- Notons tout d'abord que :

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \leqslant x - x_0 \leqslant \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha$$

$$\text{et} \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leqslant f(x) - \ell \leqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$$

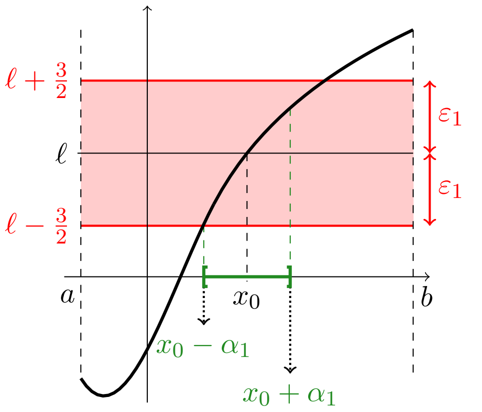
- L'idée derrière la propriété de limite est que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ ($f(x)$ est ε-proche de ℓ) dès que x est suffisamment proche de x_0 (x est α-proche de x_0).
- On peut adopter une présentation légèrement différente :

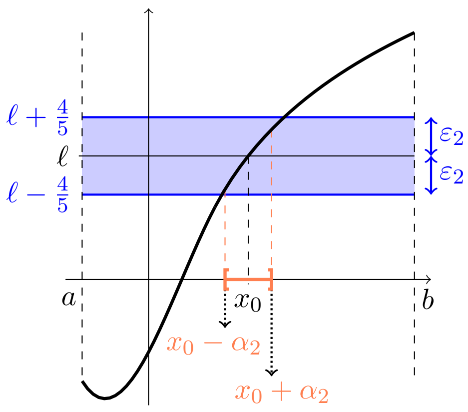
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon}$$

  Cette propriété signifie qu'on peut contrôler l'écart entre $f(x)$ et ℓ (le rendre plus petit que n'importe quel ε) à condition de prendre x dans un voisinage de x_0 adapté.
- Le voisinage adapté dépend du ε choisi au départ.
  Plus ε est petit, plus x devra être proche de x_0, donc plus α sera petit.
- Notez que le point x_0 peut être une extrémité de I. Cette extrémité n'est pas forcément un point de I (prendre par exemple $I = [-2, 5[$ et $x_0 = 5$).

I.1.b) Représentation graphique

Fonction $f : I \to \mathbb{R}$ possédant une limite en un point $x_0 \in I$ où x_0 n'est pas une extrémité de I





Dans ces deux figures, on a considéré :

- $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
- $x_0 \in]a, b[$.

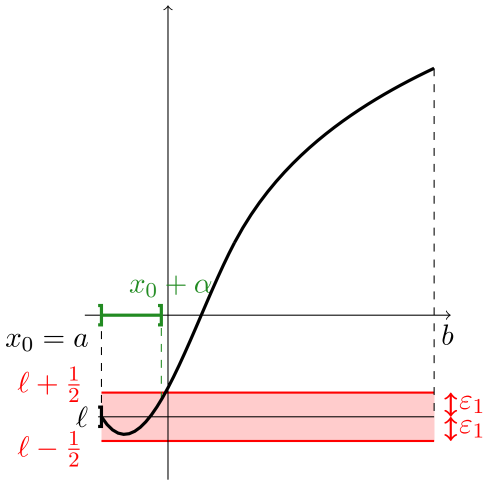
Quand x se rapproche de x_0, $f(x)$ doit se rapprocher de sa limite (si elle existe !) en x_0. Dans le cas présent, $f(x)$ semble se rapprocher de $f(x_0)$ quand x se rapproche de x_0 (résultat à venir).

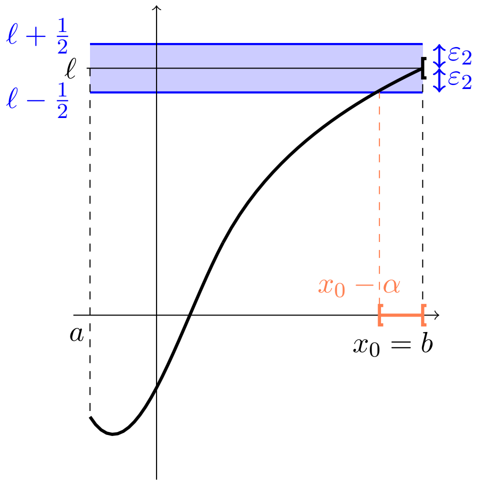
1) Dans la première figure, on a choisi $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$. On doit alors être capable de trouver un $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout x dans $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1]$ (*i.e.* x suffisamment proche de x_0), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande rouge.

2) Dans la seconde figure, on a choisi $\varepsilon_2 = \frac{4}{5} < \varepsilon_1$. La bande bleue est donc moins large que la rouge et il faut choisir un voisinage plus petit de x_0 pour assurer que les éléments de ce voisinage auront leur image dans la bande bleue.

Fonction $f : I \to \mathbb{R}$ possédant une limite en une extrémité de I

Ici, x_0 est une extrémité de I qui n'est pas forcément contenue dans I.





1) Dans la première figure, on a considéré :

- $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$. En particulier, f n'est pas définie en a.
- $x_0 = a$. On a alors : $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] =]x_0, x_0 + \alpha]$.

La fonction f admet une limite en $x_0 = a$, notée ℓ sur le dessin.

Exemple

$f : x \mapsto x \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et admet une limite en 0.
Plus précisément, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

2) Dans la deuxième figure, on a considéré :

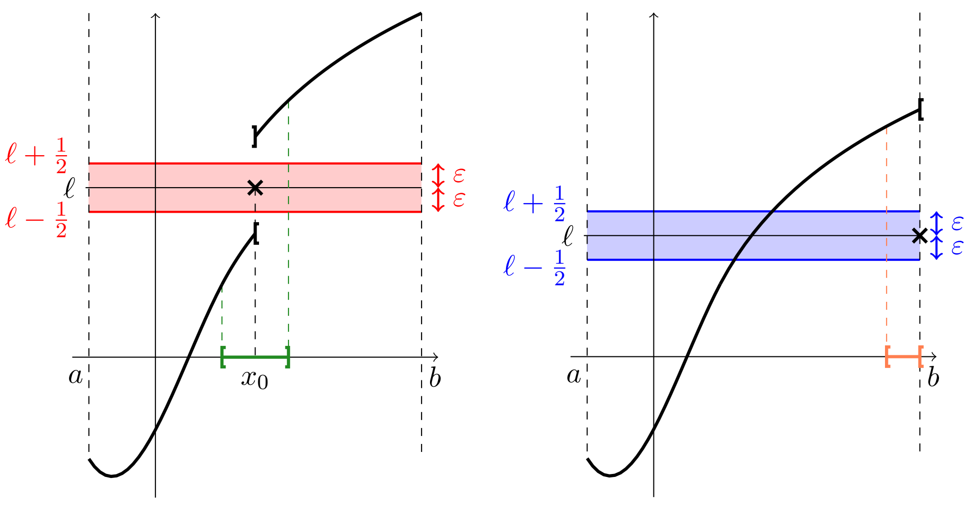
- $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$. En particulier, f n'est pas définie en b.
- $x_0 = b$. On a alors : $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] = [x_0 - \alpha, x_0[$.

La fonction f admet une limite en $x_0 = b$, notée ℓ sur le dessin.

Exemple

$f : x \mapsto x \ln(-x)$ est définie sur $]-\infty, 0[$ et admet une limite en 0.
Plus précisément, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ne possédant pas de limite au point $x_0 \in I$



1) Dans la première figure, on considère une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ avec $x_0 \in]a, b[$ (f est définie en x_0, point de l'intervalle de définition).

Si la fonction admettait une limite finie ℓ en x_0, on aurait $\ell = f(x_0)$.
Si l'on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (bande rouge), on ne peut trouver de voisinage de x_0 dont tous les éléments ont leur image dans la bande rouge.
La fonction f n'admet donc pas de limite finie en x_0.

2) Dans la seconde figure, on considère une fonction $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ avec $x_0 = b \in]a, b]$ (f est définie en x_0, point de l'intervalle de définition).

Comme précédemment, on ne peut trouver de voisinage de x_0 dont tous les éléments ont leur image dans la bande bleue (correspondant à $\varepsilon = \frac{1}{2}$).
La fonction f n'admet donc pas de limite finie en x_0.

Remarque
Pour ces deux figures, l'absence de limite finie en x_0 provient du fait que la fonction présente un saut en x_0. Cela renvoie à l'approche (incorrecte mais bonne première approximation) de la continuité vue au lycée : une fonction est continue en x_0 si l'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.

I.1.c) Unicité de la limite d'une fonction en un point

Théorème 1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

- *Si f admet au point x_0 une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, celle-ci est unique.*

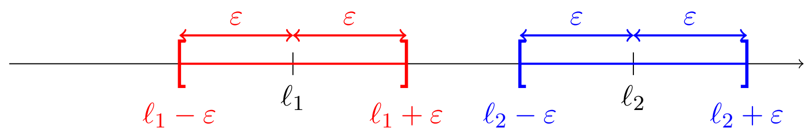
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell_1 = \ell_2}$$

Démonstration.
Supposons par l'absurde qu'il existe ℓ_1 et ℓ_2 deux réels tels que :
× $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$
× $\texttt{NON}(\ell_1 = \ell_2)$ *i.e.* $\ell_1 \neq \ell_2$.
Quitte à renommer ℓ_1 et ℓ_2, supposons que $\ell_1 < \ell_2$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que :
$\forall x \in I \ \cap \ [x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1], \ |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$.

2) Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que :
$\forall x \in I \ \cap \ [x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2], \ |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$.

Cette situation est résumée par la représentation graphique ci-après.



Notons $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$.
On a alors : $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset [x_0 - \alpha_i, x_0 + \alpha_i]$ (pour $i \in \{1, 2\}$).
Soit $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

- D'après ***1)***, $f(x)$ est situé dans l'intervalle rouge.
- D'après ***2)***, $f(x)$ est situé dans l'intervalle bleu.

Impossible ! On a donc démontré, par l'absurde, que $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Remarque
La démonstration effectuée ici est similaire à celle du CH 6 « Suites réelles : convergence ». Le schéma de démonstration ainsi que le dessin associé sont les mêmes. La seule différence notable est la suivante.

- Ici, on considère une limite en x_0. Ainsi, les propriétés ***1)*** et ***2)*** sont vérifiées dans des voisinages de x_0.
- En ce qui concerne les suites, les propriétés de convergence sont vérifiées dans des voisinages de $+\infty$.

On retiendra cette technique de démonstration et le fait qu'elle s'adapte facilement aux types de voisinages considérés.

Théorème 2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ définie au point } x_0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell = f(x_0)}$$

Démonstration.
Comme $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, on a :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \ \cap\ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Comme $x_0 \in I$, pour tout $\alpha > 0$, on a : $x_0 \in I \ \cap\ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0,\ |f(x_0) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Ceci implique (démonstration simple par contraposée) que $f(x_0) = \ell$. □

Remarque
- Le Théorème 1 stipule l'unicité de la notion de limite en un point $\underline{x_0 \in \overline{I}}$. Dans ce cas, x_0 n'est pas forcément un point de I et la fonction f n'est (éventuellement) pas définie en x_0.
- Le Théorème 2 précise le premier théorème dans le cas où la fonction est définie au point x_0. Le premier énoncé est évidemment toujours vérifié. On récupère de plus la valeur de cette limite : c'est $f(x_0)$.

I.2. Limite infinie en un point

Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

1) On dit que f admet la limite $+\infty$ au point x_0 si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

2) On dit que f admet la limite $-\infty$ au point x_0 si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque
- Cette notion signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut (*i.e.* plus grand que n'importe quel réel B fixé à l'avance) en choisissant x suffisamment proche de x_0.
- On peut adopter une présentation légèrement différente :
  1) $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \ \cap\ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ f(x) \geqslant B$
  2) $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \ \cap\ [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ f(x) \leqslant B$
- L'élément $x_0 \in \overline{I}$ de la définition est forcément une extrémité de I qui n'est pas dans I : si f est définie en x_0, f ne peut pas tendre vers $+\infty$ en x_0 sinon $f(x_0)$ serait plus grand que n'importe quel $B > 0$ choisi à l'avance.
- Pour que les notations telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ soient valides, il faut vérifier qu'une telle limite, lorsqu'elle existe, est unique.
  C'est bien le cas !

Théorème 3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

- *Si f admet une limite ℓ (éventuellement infinie) au point x_0, celle-ci est unique. Autrement dit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell_1 = \ell_2}$$

(où l'on a noté $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

Démonstration.
Si f admet une limite (éventuellement infinie) en x_0, on peut trouver un voisinage de x_0 tel que :

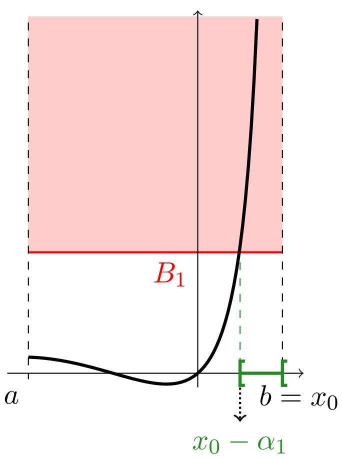
$\times$ <u>soit</u> $f(x)$ est aussi proche que souhaité de ℓ (cas où $\ell \in \mathbb{R}$),

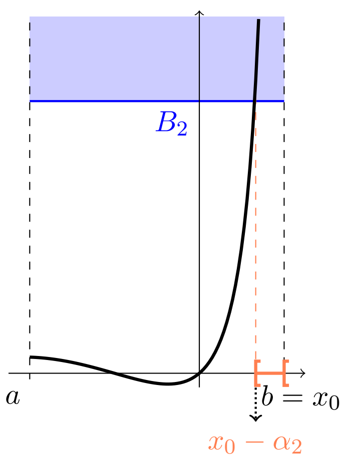
$\times$ <u>soit</u> $f(x)$ est aussi grand que souhaité (cas où $\ell = +\infty$),

$\times$ <u>soit</u> $f(x)$ est aussi grand dans les négatifs que souhaité (cas où $\ell = -\infty$).

et ces 3 cas sont disjoints. □

Représentation graphique





Dans ces deux figures, on a considéré :

- $I =]a, b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
- $x_0 \in]a, b[$.

Comme dit précédemment, x_0 est une extrémité de l'intervalle I qui n'est pas un point de I.

1) Dans la première figure, on a choisi $B_1 = 2$. On doit alors être capable de trouver un $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout x dans $[x_0 - \alpha_1, x_0[$ (*i.e.* x suffisamment proche de x_0), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande rouge.

2) Dans la seconde figure, on a choisi $B_2 = 4,5 > B_1$. Il faut donc choisir un voisinage de x_0 plus petit pour assurer que les éléments de ce voisinage auront leur image dans la bande bleue.

I.3. Extension de la notion de limite en un point

I.3.a) Limite finie à gauche et limite finie à droite

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Soient $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1) On dit que f (définie à gauche de x_0) admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme **limite finie à gauche** au point x_0 si $f_{|]-\infty, x_0[}$ admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite au point x_0.
(on considère f sur l'ensemble des points **strictement** *à gauche de x_0)*

Autrement dit, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in I, \ (x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} \ell$.

2) On dit que f (définie à droite de x_0) admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme **limite finie à droite** au point x_0 si la fonction $f_{|]x_0,+\infty[}$ admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite au point x_0.
(on considère f sur l'ensemble des points **strictement** *à droite de x_0)*
Autrement dit, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque

- Pour qu'une fonction admette une limite à gauche (resp. à droite) en x_0, il faut qu'elle soit définie à gauche (resp. à droite) de x_0.

  Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.
  Elle n'admet pas de limite à gauche en 0 puisque n'est même pas définie à gauche de 0.
- On peut adopter une présentation légèrement différente :
  1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I\ \cap\ [x_0 - \alpha, x_0[,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
  2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
- Cette définition permet d'étendre la notion de limite au cas où f est définie sur une union d'intervalles (comme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$) et pas seulement sur un intervalle I.
- Il y a unicité de la limite à gauche (resp. à droite) lorsqu'elle existe.
  (déjà démontré ! La limite à gauche de f, lorsqu'elle existe, n'est rien d'autre que la limite de la fonction $f_{|]-\infty,x_0[}$)

I.3.b) Extension au cas des limites infinies à gauche et à droite

Définition

1) On dit que f admet la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) à gauche en x_0 si $f_{|]-\infty,x_0[}$ admet une $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en x_0.
(exercice : écrire les propriétés mathématiques correspondantes)

2) On dit que f admet la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) à droite en x_0 si $f_{|]x_0,+\infty[}$ admet une $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en x_0.
(exercice : écrire les propriétés mathématiques correspondantes)

Exemple

Quelles sont les limites gauche et droite de $g \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$ en 0 ?

I.4. Limites en l'infini

Définition *(limite en $+\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et I un intervalle d'extrémité supérieure $+\infty$.

1) On dit que f admet la limite ℓ en $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2) On dit que f admet la limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A\ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) On dit que f admet la limite $-\infty$ en $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A\ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

La notion de limite en $-\infty$ est analogue à celle de limite en $+\infty$.

Définition *(limite en $-\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et I un intervalle d'extrémité inférieure $-\infty$.

1) On dit que f admet la limite ℓ en $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2) On dit que f admet la limite $+\infty$ en $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) On dit que f admet la limite $-\infty$ en $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque

- Comme précédemment, si une fonction admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors celle-ci est unique. La démonstration est analogue à la précédente. La principale différence réside dans le fait que les éléments x sont choisis dans des voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$).
- Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ c'est donc dire que l'on peut rendre $f(x)$ aussi grand que souhaité (plus grand que n'importe quel réel A) pour x suffisament grand dans les négatifs.

I.5. Continuité d'une fonction en un point

I.5.a) Continuité de $f : I \to \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

- La fonction f est continue au point $x_0 \in I$ si elle admet une limite **finie** $\ell \in \mathbb{R}$ au point x_0.

Remarque

- Comme $x_0 \in I$, si f admet la limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\ell = f(x_0)$.
  (d'après le Théorème 2)
- Ainsi, on a la caractérisation suivante :

$$\boxed{\begin{array}{ll} & f : I \to \mathbb{R} \text{ (définie au point } x_0\text{) est continue au point } x_0 \in I \\ \Leftrightarrow & \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ = \ f(x_0) \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon) \end{array}}$$

I.5.b) Prolongement par continuité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en un point x_0 extrémité de I n'appartenant pas à l'intervalle I

Théorème 4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Soit x_0 un point de $\overline{I}$ n'appartenant pas à I (f non définie en x_0).

Supposons que : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors la fonction :

$$\tilde{f} \ : \left| \begin{array}{ccc} I \,\cup\, \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est définie sur $I \,\cup\, \{x_0\}$ et est continue en x_0.

Elle est appelée **prolongement par continuité** *de f en x_0.*

Remarque

- Résumons la situation :
  f est continue en $x_0 \in \overline{I}$ si f admet une limite finie en x_0.
  (i.e. s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$)
  a) Si x_0 est un point de l'intervalle de définition I, alors : $\ell = f(x_0)$,
  b) Si x_0 une extrémité de I qui n'est pas dans I, on rédigera ainsi :
  « on prolonge la fonction f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$ ».
  (on confond ainsi f et son prolongement par continuité $\tilde{f}$)

Exemple
On considère la fonction $f : x \to x^x$.
Cette fonction est définie pour $x > 0$ *i.e.* sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $x > 0$, on a : $x^x = e^{x \ln x}$.
- Or : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} x^x = \lim\limits_{x \to 0} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.

On peut donc prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0) = 1$.

I.5.c) Lien entre continuité et limite finie à droite / à gauche

Théorème 5.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$ (en particulier, f est définie au point x_0).
On suppose de plus que f est définie à gauche et à droite de x_0.

$$\text{f est continue au point x_0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ f \text{ admet une limite finie à gauche en } x_0 \\ \bullet\ f \text{ admet une limite finie à droite en } x_0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{array} \right.$$

Remarque

- Le test par rapport à $f(x_0)$ est important.
  Considérons la fonciton f suivante.
  $$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$
  On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
  Cependant, $f(0) = 1 \neq 0$ donc la fonction f n'est pas continue en 0.
- Ce théorème est particulièrement utile lorsque l'on considère des fonctions qui possèdent une définition par cas.

Exemple

- La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 puisque :
  × $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f_{|]-\infty,0[}(x) = \lim\limits_{x \to 0} -x = 0$,
  × $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f_{|]0,+\infty[}(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$,
  × et $f(0) = |0| = 0$.
- La fonction $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 3 puisque :
  × $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} g_{|]2,3[}(x) = \lim\limits_{x \to 3} 2 = 2$,
  × $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} g_{|]3,4[}(x) = \lim\limits_{x \to 3} 3 = 3$,
  × et $g(3) = 3$.

Dans le cas où la fonction $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ n'est pas définie en x_0, on cherche à savoir si on peut la **prolonger par continuité** en x_0.

I.5.d) Prolongement par continuité de f en x_0 où f n'est pas définie

Théorème 6. *(prolongement par continuité)*

Soit x_0 un point d'un intervalle I.

Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un $I \setminus \{x_0\}$ (en particulier, f n'est pas définie au point x_0).

On suppose de plus que f est définie à droite et à gauche de x_0.

- *Si les propriétés suivantes sont vérifiées :*
  1) f admet une limite finie à gauche en x_0,
  2) f admet une limite finie à droite en x_0,
  3) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$,
  alors f admet la limite ℓ en x_0 i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
- *On prolonge alors f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.*

Remarque
Les Théorèmes 5 et 6 sont deux présentations différentes du même résultat. C'est la manière dont la question est posée qui doit nous amener à utiliser un théorème plutôt qu'un autre.

Exemple

1) On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln|x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Démontrer que la fonction f est continue en 0.

On utilise le Théorème 5.
Comme $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et que $f(0) = 0$, la fonction f est continue en 0.

2) On considère la fonction $g : x \mapsto x \ln|x|$.
Démontrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0.

On utilise dans ce cas le Théorème 6 puisque g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et donc pas en 0.
Comme $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

II. Limite des opérations sur les fonctions

II.0. Notations de cette section

Dans tout ce qui suit :

× on considère des fonctions f et g définies sur un intervalle I,

× on considère un « point » x_0 de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et des limites finies $\ell, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

× il est supposé que f et g possèdent une limite (finie ou non) au point x_0.

Cette notation concise (à l'aide de $\overline{\mathbb{R}}$) permet de faire apparaître les résultats sous forme de tableaux envisageant tous les cas.

On parlera de *forme indéterminée* (et on notera F.I.) quand on ne peut déterminer, de manière générale, la limite d'une opération sur les fonctions. Dans ce cas, il faudra faire une étude au cas par cas.

II.1. Limite d'une somme $f + g$

	Somme : $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$		
$\lim\limits_{x_0} g$ \ $\lim\limits_{x_0} f$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Ce cas amène donc à considérer une F.I. : $\boxed{+\infty - \infty}$

II.2. Limite d'un produit $f \times g$

$\lim_{x_0} g$ \ $\lim_{x_0} f$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
	Produit : $\lim\limits_{x\to x_0} (f \times g)(x)$				
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Ce cas amène donc à considérer une F.I. : $\boxed{0 \times \infty}$

Cas des limites infinies : les résultats sont donnés par la règle des signes.

II.3. Limite de l'inverse $\dfrac{1}{f}$

$\lim_{x_0} f$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
	Inverse : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f}(x)$			
Si $f > 0$ sur V_{x_0}	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	0	
Si $f < 0$ sur V_{x_0}	$\dfrac{1}{\ell}$	$-\infty$		0

*(**Note** : V_{x_0} est un voisinage épointé de x_0 sur lequel f ne s'annule pas. Ceci permet de considérer l'inverse $\frac{1}{f}$)*

II.4. Limite d'un quotient

$\lim_{x_0} g$ \ $\lim_{x_0} f$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
	Quotient : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g}(x)$				
$\ell_2 > 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$ et $g > 0$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = 0$ et $g < 0$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.
$-\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.

Ce cas amène donc à considérer deux F.I. : $\boxed{\dfrac{0}{0} \ , \ \dfrac{\infty}{\infty}}$

Application à la continuité en un point

Propriété

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Supposons que f et g sont continues en un point $x_0 \in I$.

Alors les fonctions :

- × somme $f + g$,
- × produit $f \times g$,
- × quotient $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de x_0),

sont des fonctions continues en x_0.

II.5. Limite et composition

II.5.a) Limite de la composée $g \circ f$

Théorème 7.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.
(permet de considérer la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$)

Soit $x_0 \in \overline{I}$. Supposons que :

- × *f admet la limite (éventuellement infinie) x_1 en x_0,*
- × *g admet la limite (éventuellement infinie) ℓ en x_1.*

Alors la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ admet la limite ℓ en x_0.

On peut résumer cette situation comme suit.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_1 \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to x_1} g(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g\circ f\ (x) \ = \lim_{x\to x_1} g(x) \ = \ \ell$$

Remarque

- Les éléments x_1 et ℓ sont éventuellement infinis. D'ailleurs, on peut aussi adapter cet énoncé aux cas $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- L'idée derrière ce théorème est de pouvoir écrire l'égalité suivante :

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f\ (x) \ = \ \text{« } g(\lim_{x\to x_0} f(x)) \text{ »}$$

  On ne peut cependant pas toujours enlever les « » puisque rien ne dit que g est définie en $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (cet élément peut notamment être infini).
- Dans le cas où f est continue en $x_0 \in \overline{I}$ (*i.e.* admet une limite finie en x_0) et g continue en $x_1 \in \overline{J}$ (*i.e.* admet une limite finie en x_0), ce théorème permet d'affirmer que la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

Exemple

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{3x^3+5(\ln x)^5}{-x^3-\ln x}} = \lim\limits_{x\to-3} \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-3}$

II.5.b) Application : calcul de limites par changement de variable

On s'intéresse à la fonction $h : x \mapsto x \ln x$ (définie sur $]0, +\infty[$). Plus précisément, on souhaite déterminer la limite de h en 0.

- On a : $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

  ↪ on est donc amené à résoudre une F.I.
- On remarque que : $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{\cancel{\ln(1)} - \ln x}{\frac{1}{x}} = -x\ln x = -h(x)$

  ↪ on a donc $h(x) = -\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$
- La fonction h apparaît comme composée de la fonction $g : x \mapsto -\dfrac{\ln x}{x}$ et de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
- On applique alors le théorème de composition à cette nouvelle écriture :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \ = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} \ = \ 0$$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x \ = \ 0$.

Remarque
Grâce à cette technique de changement de variable, on est passé d'un calcul de limite en 0^+ à un calcul de limite en $+\infty$. En déplaçant le problème, on a levé la F.I. et ce grâce à nos connaissances sur le comportement des fonctions en $+\infty$ (*cf* paragraphe sur les croissances comparées plus loin).

Un point sur la rédaction

Exercice
Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ \ln x$. On pourra effectuer un changement de variable.

On rédige alors comme suit.

- On pose $X = \frac{1}{x}$.
- Ainsi, si $x \to 0^+$, alors $X \to +\infty$ ($x \to 0^+ \ \Rightarrow \ X \to +\infty$).
- On a alors :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \to +\infty} \ - \ \frac{\ln(X)}{X} = 0$$

(on a remplacé chaque occurrence de x par $\frac{1}{X}$ dans l'expression $h(x) = x \ \ln x$, ce qui correspond au changement de variable $X = \frac{1}{x}$)

Remarque
En résumé, le théorème de composition des limites s'utilise :

1) **de manière directe** comme dans la section Exemple précédente. La fonction apparaît sous forme d'une composée et l'application du théorème fournit la valeur de la limite recherchée.

2) **de manière indirecte** lorsque le calcul d'une limite amène à une F.I. L'utilisation d'un **changement de variable** (le plus souvent mentionné dans l'énoncé) doit permettre de lever la F.I.

II.5.c) Limite d'une suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème 8.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.

Soit (u_n) une suite d'éléments de I.

Supposons que :

× *(u_n) admet la limite x_0 quand $n \to +\infty$,*

× *f admet la limite ℓ (éventuellement infinie) en x_0.*

Alors la suite $(f(u_n))$ admet la limite ℓ en x_0.

On peut résumer cette situation comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0 \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \ = \ \lim_{x \to x_0} f(x) \ = \ \ell}$$

Démonstration. (partielle)
On se restreint au cas où x_0 et ℓ sont des limites finis.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet la limite ℓ en x_0, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tq :

$$\forall x \in I, (|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Or $u_n \in I$. On peut donc appliquer la propriété précédente en $x = u_n$:

$$(|u_n - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Il suffit maintenant de constater que comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0$, il existe un certain rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0, \ |u_n - x_0| \leqslant \alpha$.
On a donc : $\forall n \geqslant n_0, \ |f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. $\square$

Remarque

- On peut adapter cet énoncé aux cas $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- L'idée derrière ce théorème est de pouvoir écrire l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \ = \ \text{« } f(\lim_{n\to+\infty} u_n) \text{ »}$$

On ne peut cependant pas toujours enlever les « » puisque rien ne dit que f est définie en $\lim\limits_{x\to x_0} u_n$ (cet élément peut notamment être infini).

- Dans le cas où (u_n) est convergente (*i.e.* si x_0 est fini) et f est continue en $x_0 \in \overline{I}$ (*i.e.* si ℓ est finie), ce théorème permet d'affirmer que la suite $(f(u_n))$ est convergente.

Ce résultat est notamment utile pour les suites définies par une relation de récurrence du type : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Ce théorème peut aussi être utilisé de manière négative pour démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en x_0.

Plus précisément, si (u_n) et (v_n) sont deux suites, on a le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ = \ x_0 \ = \ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f \text{ n'a pas de limite en } x_0}$$

(démonstration aisée par l'absurde)

Exercice

Démontrer que $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 1.

On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = 1-\frac{1}{n}$ et $v_n = 1+\frac{1}{n}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ = \ 1 \ = \ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
- $f(u_n) = \lfloor 1 - \frac{1}{n} \rfloor = 0 \to 0$ et $f(v_n) = \lfloor 1 + \frac{1}{n} \rfloor = 1 \to 1$

Le résultat précédent nous permet d'affirmer que f n'a pas de limite (finie ou infinie) en 1. En particulier, f n'est pas continue en 1.

II.6. Relations de comparaisons et croissances comparées

II.6.a) Négligeabilité

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $g : I \to \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est négligeable devant** g **en** x_0 si :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \ = \ 0}$$

- Si c'est le cas, on dit que « f est un petit o de g en x_0 » (o = 15ème lettre de l'alphabet) et on note : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\left(g(x)\right)$.

- On utilise aussi parfois la notation : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$.

Cette notation trompeuse (à ne surtout pas confondre avec $f(x) \leqslant g(x)$!) est réservée à l'écriture d'échelles de comparaison asymptotiques.

II.6.b) Croissances comparées

Théorème 9.

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0}$$

et

$$\boxed{\forall a > 0, \forall q > 1, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{q^x} = 0}$$

Remarque

- On peut écrire le résultat de ce théorème sous la forme d'une échelle de comparaison asymptotique :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \forall q > 1,\ (\ln x)^b \underset{+\infty}{<<} x^a \underset{+\infty}{<<} q^x}$$

- Cela signifie que la croissance asymptotique (*i.e.* en $+\infty$) logarithmique est beaucoup plus faible que la croissance asymptotique polynomiale qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance asymptotique exponentielle.
- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{q^x}{x^a} = +\infty}$$

- Classiquement, on pourra choisir $q = \mathrm{e}^1$ ou $q = \mathrm{e}^2$, ou $q = \mathrm{e}^c$ avec $c > 0$ (on a bien $\mathrm{e}^c > 1$). Ceci permet de comparer le comportement asymptotique de $\mathrm{e}^{c\,x}$ et x^a. Plus précisément : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{c\,x}}{x^a} = +\infty$.
- On en déduit aussi que : $\boxed{\forall a > 0, \forall r \in]0,1[,\quad \lim_{x\to+\infty} x^a\ r^x = 0}$

  Il suffit de remarquer que si $r \in]0,1[$, alors $q = \dfrac{1}{r} > 1$.

  On a alors : $x^a\ r^x = x^a \left(\dfrac{1}{q}\right)^x = \dfrac{x^a}{q^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Ainsi que : $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0,\quad \lim_{x\to0^+} x^a\ (\ln x)^b \ = \ 0}$

  La démonstration se fait grâce au changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$.

II.6.c) Équivalence

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $g : I \to \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est équivalente à** g **en** x_0 et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ = \ 1}$$

Remarque

- Trouver une fonction g équivalente à une fonction f en x_0 c'est trouver une fonction qui a le même comportement que f à proximité de x_0. Ainsi, si l'on se place à proximité de x_0, les courbes représentatives de f et de g apparaîtront comme confondues.
- Le but est de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que la fonction f (penser par exemple aux fonctions polynomiales).

Théorème 10.

Soient $f, g, h, t : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

La relation $\underset{x\to x_0}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) *Réflexivité :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)}$$

2) *Commutativité :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \ \Rightarrow \ g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)}$$

4) Compatibilité avec le produit :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\times h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\times t(x)}$$

5) Compatibilité avec le quotient :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}}$$

6) Équivalent et limites :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell}$$

(avec ℓ limite éventuellement infinie)

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)}{f(x)} = 1 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1$.

4) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)\times h(x)}{g(x)\times t(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{h(x)}{t(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1$.

5) Il suffit d'écrire : $\dfrac{\frac{f(x)}{h(x)}}{\frac{g(x)}{t(x)}} = \dfrac{f(x)}{h(x)} \times \dfrac{t(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1$.

6) Il suffit d'écrire : $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1\times \ell = \ell$.

$\square$

Exercice

Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10}$?

1) $3x+4 \underset{+\infty\to 3}{\sim} x$ car $\dfrac{3x+4}{3x} = 1 + \dfrac{4}{3x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Ainsi : $(3x+4)^3 = (3x+4)(3x+4)(3x+4) \underset{+\infty\to(}{\sim} 3x)(3x)(3x) = 3^3x^3$.

2) $8x^{-2}+2x^{-4} \underset{+\infty\to 8}{\sim} x^{-2}$ car $\dfrac{8x^{-2}+2x^{-4}}{8x^{-2}} = 1 + \dfrac{2x^{-4}}{8x^{-2}} = 1 + \dfrac{1}{4x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

On en déduit que : $(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4}) \underset{+\infty\to 3}{\sim} {}^3x^3 \times 8x^{-2} = 3^3\ 8x$

3) $9x+10 \underset{+\infty\to 9}{\sim} x$ car $\dfrac{9x+10}{9x} = 1 + \dfrac{10}{9x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

On en déduit que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^{\cancel{3}}\ 8\cancel{x}}{\cancel{9}\cancel{x}} = 3\times 8 = 24$.

Ainsi : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 24$.

II.7. Lever une F.I.

Tout d'abord résumons les F.I. rencontrées lors de l'étude des différentes opérations algébriques :

$$\boxed{\infty - \infty \quad , \quad 0 \times \infty \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

Afin de lever un F.I., on pourra penser à utiliser l'une des méthodes (plus généralement une combinaison des méthodes) suivantes.

a) Factoriser par le terme dominant (i.e. celui ayant la plus forte croissance).

b) Penser à la quantité conjuguée.

c) Pour les fonctions puissances : retour à la définition à l'aide des fonctions exp et ln.

d) Faire apparaître une limite connue par changement de variable.

e) Penser aux croissances comparées.

f) Utilisation du taux d'accroissement.

g) Utilisation d'inégalités.

II.7.a) Factoriser par le terme dominant

Exemple

1) Dans le cas de fonctions rationnelles :

- Limite de $f(x) = \dfrac{-5x^2 + 37x - 4}{8x^2 - 2}$ en $+\infty$.
- Limite de $g(x) = \dfrac{x^7 - 1}{52x^6 + 3x^2 - 2x}$ en $-\infty$.

Définition
Une fonction f est appelée **fonction rationnelle** si elle le quotient de deux fonctions polynômes.

Propriété
Une fonction rationnelle a même limite, en $+\infty$ et $-\infty$, que le rapport de ses monômes de plus haut degré.

2) Dans le cas général :

- Limite de $f(x) = \dfrac{x^2 \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{2x}}{x^3(\ln x) + x(\ln x)^3}$ en $+\infty$.
- Limite de $g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x + x^2 + \mathrm{e}^{x^3}}{x^3 + 5}$ en $-\infty$.
- Limite de $h(x) = \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$ en $+\infty$.

II.7.b) Penser à la quantité conjuguée

On utilise généralement cette technique lorsque l'on a à faire avec une fonction s'écrivant comme différence de deux racines comparables.

Exemple

- Limite de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$ en $+\infty$.
- Limite de $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

II.7.c) Fonctions puissances

Lorsque l'on est confronté à une fonction avec puissance en x, on revient à la définition avec les fonctions exponentielle et logarithme.

Exemple

- Limite de $f(x) = x^x$ en 0^+.
- Limite de $g(x) = \dfrac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$ en $+\infty$.

II.7.d) Changements de variable

Faire un changement de variable permet de modifier le « point » où l'on cherche la limite.

Exemple

- Limite de $f(x) = x^2 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ *(on pourra poser $X = \frac{1}{x}$)*
- Limite de $g(x) = \ln x \times \ln(\ln x)$ en 1 *(on pourra poser $X = \ln x$)*

II.7.e) Croissances comparées

Cette technique est souvent combinée à celle de mise en facteur du terme dominant.

Exemple

- Limite de $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{9x^3}$ en $+\infty$.
- Limite de $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x-1}}{(\ln x)^4}$ en $+\infty$.

II.7.f) Utilisation du taux d'accroissement

Théorème 11.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ alors, **par définition**, *on a :*

a) $\boxed{\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

b) $\boxed{\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$ *(formulation équivalente)*

On a notamment :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1}$$

Exemple

- Limite de $f(x) = \left(1 + x^3\right)^{1/x}$ en 0.
- Limite de $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.

III. Compatibilité de la notion de limite avec la relation d'ordre

III.1. Démontrer des inégalités sur les limites finies

Théorème 12. *(« Passage à la limite » dans les inégalités)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

On suppose que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0.
(i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$)

On a alors :

a) *Si dans un voisinage de x_0 on a $f \geqslant u$ alors on a : $\ell \geqslant u$.*

b) *Si dans un voisinage de x_0 on a $f \leqslant v$ alors on a : $\ell \leqslant v$.*

c) *Si dans un voisinage de x_0 on a $u \leqslant f \leqslant v$ alors on a : $u \leqslant \ell \leqslant v$.*

On peut résumer cet énoncé comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ u \leqslant f \leqslant v \textit{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet \ \ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \ u \leqslant \ell \leqslant v}$$

Remarque

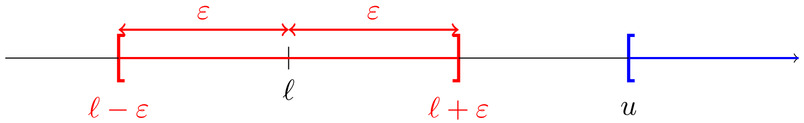
- On rappelle (*cf* début du chapitre) qu'une propriété relative à une fonction f, définie sur I, est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
- Ainsi, lorsque l'on suppose « $f \geqslant u$ dans un voisinage de x_0 », cela signifie qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \ f(x) \geqslant u$$

Démonstration.
Supposons que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0.

a) On procède par l'absurde.
On suppose donc :
 × qu'il existe $\alpha_1 > 0$ tel que : $\forall x \in I \ \cap\ [x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1],\ f(x) \geqslant u$,
 × et que $\ell < u$.

L'idée de la démonstration est contenue dans le dessin suivant :



Pour que ce dessin soit valide, il faut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < u$.
On choisit alors $\varepsilon = \dfrac{u - \ell}{2}$.
Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in\ I \cap [x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2],\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ce qui revient à dire que, sur cet ensemble : $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$.
Notons $\alpha = \min\ (\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $x \in I \cap [x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2]$. Alors :
 × $f(x)$ est dans l'intervalle rouge,
 × $f(x)$ est dans l'intervalle bleu.

Impossible !

b) Si $f \leqslant v$, alors $-f \geqslant -v$ et donc, par le point ***a)*** précédent, $-\ell \geqslant -v$.
On en déduit que $\ell \leqslant v$.

c) Combinaison des points ***a)*** et ***b)***. □

Ce théorème ne permet pas de démontrer qu'une fonction admet une limite mais permet de comparer des limites **existantes**.
On ne peut « passer à la limite » dans une égalité que si les objets qu'on considère possèdent une limite.

Remarque

- Cet énoncé reste vrai lorsque $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- Ce théorème peut être utilisé lorsque la fonction f vérifie une inégalité stricte. Cependant, la conclusion reste une inégalité large.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ u < f < v \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet\ \ \ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow\ \ u \leqslant \ell \leqslant v$$

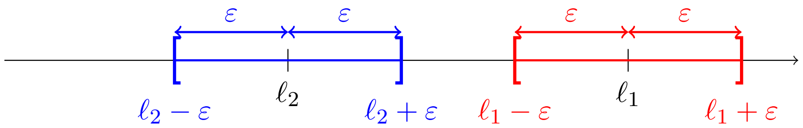
(par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges)

Théorème 13. *(Théorème de comparaison des limites)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.
Supposons que :
 × *f admet une limite finie $\ell_1 \in \mathbb{R}$ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$,*
 × *g admet une limite finie $\ell_2 \in \mathbb{R}$ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$.*

Si dans un voisinage de x_0 on a $f \leqslant g$ alors on a : $\ell_1 \leqslant \ell_2$.
On peut résumer cet énoncé comme suit.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ f \leqslant g \textit{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet\ \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \bullet\ \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \ \ell_1 \leqslant \ell_2$$

Démonstration.
On suppose que f et g admettent des limites finies en x_0.
Comme pour le théorème précédent, on raisonne alors par l'absurde en supposant que $f \leqslant g$ sur un voisinage V de x_0 et que $\ell_1 > \ell_2$.
On s'appuie alors sur le dessin suivant.



On choisit $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3}$ (permet de valider ce dessin).

- Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_1$, il existe $V_{x_0}^1$ (un voisinage de x_0 tel que, pour tout $x \in V_{x_0}^1$, l'intervalle rouge contient $f(x)$.
- Comme $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell_2$, il existe $V_{x_0}^2$ (un voisinage de x_0 tel que, pour tout $x \in V_{x_0}^2$, l'intervalle bleu contient $f(x)$.

On en déduit que, sur le plus petit de ces deux voisinages (*i.e.* sur $V_{x_0}^1 \cap V_{x_0}^2$) on a $f > g$. Mais alors sur $V \cap V_{x_0}^1 \cap V_{x_0}^2$ on a : $f > g$ et $f \leqslant g$.
Impossible ! $\square$

> Ce théorème ne permet pas de démontrer qu'une fonction admet une limite mais permet de comparer des limites **existantes**.

Remarque
Les remarques du théorème précédent s'appliquent à cet énoncé.

- Cet énoncé reste vrai lorsque $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- Ce théorème peut être utilisé lorsque f est comparé à g par une inégalité stricte. Cependant, la conclusion reste une inégalité large.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f < g \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell_1 \leqslant \ell_2$$

(par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges)

III.2. Existence d'une limite par encadrement

III.2.a) Cas des limites finies

Théorème 14. *(Théorème d'encadrement)*

Soit $f, g, h : I \to \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Supposons que :

- × *$f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de x_0,*
- × *f admet la limite finie ℓ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,*
- × *h admet la limite finie ℓ en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$.*

Alors la fonction g admet une limite finie en x_0. De plus, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

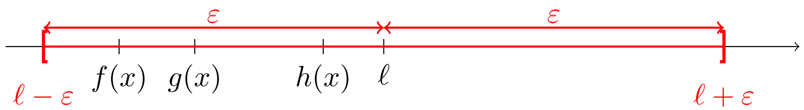
On peut résumer ce théorème comme suit.

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & \leqslant & g(x) & \leqslant & h(x) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x \to x_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x \to x_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x \to x_0} \\ \ell & \leqslant & \ell & \leqslant & \ell \end{array}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, il existe un voisinage $V_{x_0}^1$ tel que : $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.
- Comme $h(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$, il existe un voisinage $V_{x_0}^2$ tel que : $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

On en déduit que pour tout x dans le plus petit de ces deux voisinages :
$\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ et donc $g(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.



$\square$

Remarque

Les remarques précédentes s'appliquent encore.

- Cet énoncé reste vrai lorsque $x_0 = +\infty$ (I est alors d'extrémité $+\infty$) et $x_0 = -\infty$ (I est alors d'extrémité $-\infty$).
- Ce théorème peut être utilisé avec une hypothèse énonçant une inégalité stricte. La conclusion reste la même.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} f(x) & < & g(x) & < & h(x) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle x \to x_0} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x \to x_0} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x \to x_0} \\ \ell & \leqslant & \ell & \leqslant & \ell \end{array}}$$

- Attention, on ne peut parler de passage à la limite pour cet énoncé puisqu'on **démontre** que g admet une limite en x_0 et qu'on ne le sait pas initialement.
- Ce théorème d'encadrement fait partie des techniques pouvant être utilisées pour lever une F.I. : ***g)*** Utilisation d'inégalités.

Exemple

- Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{2x + \lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}$ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de $g(x) = \dfrac{3}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$ en 0.

Corollaire 1.

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$ (ou $x_0 = +\infty$, ou $x_0 = -\infty$ ...).

Supposons que :

× $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$,

× *il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que :* $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$.

On a alors : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Démonstration.

On a $\ell - g(x) \leqslant f(x) \leqslant \ell + g(x)$ pour tout x dans V_{x_0}.

On utilise le théorème précédent pour conclure. □

Exemple

On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right.$

1) Démontrer que, pour tout $x \neq 0$, $|f(x) - 1| \leqslant |x|$.

2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

1) $|f(x) - 1| = \left| x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor - 1 \right| = \left| x \left(\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor - \dfrac{1}{x} \right) \right| = |x| \left| \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor - \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$

car pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|\lfloor u \rfloor - u| \leqslant 1$.

2) Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0} |x| = 0$, le théorème d'encadrement permet d'affirmer, à l'aide de l'inégalité précédente, que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) - 1 = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

III.2.b) Cas des limites infinies

Théorème 15.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$ (ou $x_0 = +\infty$, ou $x_0 = -\infty$ ...).

Supposons qu'au voisinage de x_0, on a : $f \leqslant g$.

On a alors :

a) *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*

b) *Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \leqslant g \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \leqslant g \text{ au voisinage de } x_0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

Démonstration.

a) Soit $B > 0$.

- Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $V^1_{x_0}$ tel que $f(x) \geqslant B$.
- D'après l'énoncé, il existe un voisinage $V^2_{x_0}$ tel que, pour tout $x \in V^2_{x_0}$, on a : $f(x) \leqslant g(x)$.

On en déduit que pour tout x dans le plus petit de ces deux voisinages : $B \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et donc $g(x) \geqslant B$.

b) On utilise le résultat précédent.

- Comme $f \leqslant g$, on a $-f \geqslant -g$.
- Comme $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} -g(x) = +\infty$.

On déduit du point ***a)*** que $\lim\limits_{x \to x_0} -f(x) = +\infty$ ce qui revient à dire que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

□

Remarque

Ce théorème d'encadrement fait partie des techniques pouvant être utilisées pour lever une F.I. : ***g)*** Utilisation d'inégalités.

Exemple

Limite de $g(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x + x^2 + \mathrm{e}^{x^3}}{x^3 + 5}$ en $+\infty$.

En factorisant par le terme dominant, on obtient : $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3} \dfrac{\frac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^3}} + \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^3}} + 1}{1 + \frac{5}{x^3}}$

Il est à noter que, formellement, on ne peut appliquer directement le théorème des croissances comparées pour démontrer que : $\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En effet, e^{x^3} n'est pas de la forme q^x.

Cependant, on peut s'y ramener facilement :

- $\forall x \geqslant 1,\ x^3 \geqslant x$.
  (cette inégalité est aussi vérifiée dans un voisinage de $+\infty$)
- Par croissance de la fonction exponentielle, on a : $\mathrm{e}^{x^3} \geqslant \mathrm{e}^x$.
- On a donc : $\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$.

D'après le théorème des croissances comparées, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que $\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En conclusion de ce chapitre, prenons un peu de recul
En mathématiques, deux mondes se côtoient :

- × **le monde discret** qui est composé des ensembles finis ou dénombrables ainsi que des objets obtenus par un nombre d'opérations au plus dénombrable. Par exemple, une somme finie ou une somme infinie indexée sur $\mathbb{N}$ (on en reparlera !) ou encore une suite (qui par définition prend un nombre au plus dénombrable de valeurs) sont des objets discrets.
- × **le monde continu** qui est composé des ensembles équipotents à $\mathbb{R}$ (*i.e.* en bijection avec) ainsi que des objets obtenus en utilisant autant d'opérations qu'il y a de réels. Par exemple, une fonction réelle (qui peut prendre a priori autant de valeurs qu'il y en a dans $\mathbb{R}$) est un objet continu.

Évidemment cette distinction n'a de sens que parce que l'infini dénombrable (*i.e.* le nombre d'éléments dans $\mathbb{N}$) est plus petit que le nombre d'éléments dans $\mathbb{R}$*(les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne peuvent être mis en bijection)*.

- Dans ce chapitre on étudie des objets du monde continu (les fonctions réelles). On y a étudié la notion de limite finie qu'on a appelé ici continuité.
- Dans le CH 6, on a étudié des objets du monde discret (les suites réelles). On y a étudié la notion de limite finie qu'on a appelé convergence.

Autrement dit, on a défini la même notion dans deux mondes différents, ce qui explique que l'on retrouve les mêmes théorèmes et les mêmes techniques de démonstration !

IV. Déterminer les asymptotes d'une fonction

De manière générale, tracer la courbe représentative d'une fonction f est une tâche ardue. Afin que cette courbe de f soit la plus précise possible, on s'intéresse notamment aux tangentes de f en certains points. S'intéresser à la tangente en un point x_0 a plusieurs avantages :

× les tangentes sont des droites (donc facile à représenter),

× l'équation d'une tangente est simple à déterminer,

× la fonction f a le « même comportement local » (au voisinage de x_0) que sa tangente au point x_0.

Lorsque la fonction f n'est pas définie en x_0 (avec éventuellement $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$), son comportement est fourni par sa limite (si elle existe !) :

1) si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$: on prolonge la fonction f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.

2) si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$: on étudie l'existence de branche infinie de f en x_0.

Les branches infinies de f possèdent des avantages comparables aux tangentes :

× ce sont des droites (donc facile à représenter),

× leur équation est simple à déterminer,

× la fonction f se rapproche asymptotiquement de ses branches infinies. Autrement dit, f a le même comportement asymptotique que ses branches infinies.

> En résumé, on peut voir les branches infinies comme l'analogue des tangentes en les points ou f n'est pas définie et ne peut être prolongée par continuité ($-\infty$ et $+\infty$ inclus).

IV.1. Asymptote verticale

Définition

Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f admet **l'asymptote verticale** $x = x_0$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

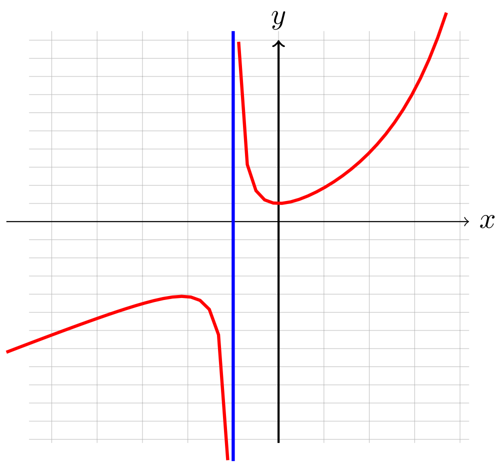
Exemple

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + e^x}{x+1}$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Si l'on souhaite tracer le graphe de f, on s'intéresse au comportement de f aux bornes de son intervalle de définition *i.e.* en $-\infty$, en $+\infty$ et en -1. Étudions ici le comportement de f en -1. On a :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

On en déduit que f admet la droite $x = -1$ comme asymptote verticale.



IV.2. Asymptote horizontale

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) Soit I d'extrémité supérieure $+\infty$.
On dit que la fonction f admet **l'asymptote horizontale** $y = \ell$ en $+\infty$ si f admet la limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ $\left(i.e. \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell\right)$.

2) Soit I d'extrémité inférieure $-\infty$.
On dit que la fonction f admet **l'asymptote horizontale** $y = \ell$ en $-\infty$ si f admet la limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ $\left(i.e. \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell\right)$.

Exemple

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

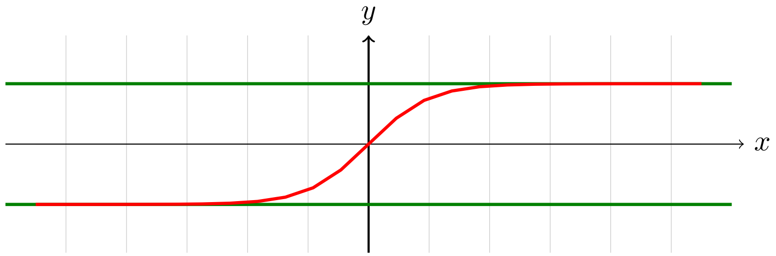
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ puisque son dénominateur ne s'annule jamais. Si l'on souhaite tracer le graphe de f, on s'intéresse au comportement de f aux bornes de son intervalle de définition *i.e.* en $-\infty$, en $+\infty$. On a :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x}\,\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On en déduit que f admet l'asymptote horizontale $y = 1$ en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\,\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$$

On en déduit que f admet l'asymptote horizontale $y = -1$ en $-\infty$.



IV.3. Asymptote oblique

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1) Soit I d'extrémité supérieure $+\infty$.
On dit que f admet **l'asymptote oblique** $y = ax + b$ en $+\infty$ si :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0}$$

2) Soit I d'extrémité inférieure $-\infty$.
On dit que f admet **l'asymptote oblique** $y = ax + b$ en $-\infty$ si :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax + b) = 0}$$

La propriété suivante fournit une méthode pour déterminer les valeurs a et b d'une asymptote oblique.

Propriété *(déterminer une asymptote oblique en $+\infty$)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

f admet la droite $y = ax + b$ comme asymptote oblique en $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a} \\ \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b} \end{cases}$

Évidemment, on peut écrire une propriété analogue pour les asymptotes obliques en $-\infty$.

Exemple

On considère (de nouveau) la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + e^x}{x+1}$.

- Intéressons-nous tout d'abord au comportement de f en $+\infty$. Pour ce faire, on commence par déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$. Factorisons ce quotient à l'aide des termes dominants. On a alors :

$$\frac{f(x)}{x} \;=\; \frac{x^2 + e^x}{x(x+1)} \;=\; \frac{e^x}{x^2} \, \frac{\frac{x^2}{e^x} + 1}{1 + \frac{1}{x}}$$

ce qui permet de démontrer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \;=\; +\infty$$

On en déduit que la fonction f n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$. *(dans ce cas, on parle parfois de branche parabolique de direction l'axe des ordonnées)*

- Intéressons-nous maintenant au comportement de f en $-\infty$. Pour ce faire, on commence par déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \to -\infty$. Factorisons ce quotient à l'aide des termes dominants. On a alors :

$$\frac{f(x)}{x} \;=\; \frac{x^2 + e^x}{x(x+1)} \;=\; \frac{x^2}{x^2} \, \frac{\frac{e^x}{x^2} + 1}{1 + \frac{1}{x}}$$

ce qui permet de démontrer :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} \;=\; 1$$

Il reste donc à déterminer la limite de $f(x) - x$. On a :

$$f(x) - x \;=\; \frac{x^2 + e^x}{x+1} - x \;=\; \frac{e^x - x}{x+1} \;=\; \frac{-x}{x} \, \frac{\frac{e^x}{-x} + 1}{1 + \frac{1}{x}}$$

ce qui permet de démontrer :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x \;=\; \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} \;=\; -1$$

On en déduit que la droite $y = x - 1$ est asymptote oblique de f en $-\infty$.