

I. Rappels sur les manipulations de base

Il s'agit ici d'un simple rappel des règles qu'il faut maîtriser.

Il faut pouvoir utiliser ces règles dans des cas concrets.

I.1. Règles de calcul générales

• Manipulation de fractions

Ces propriétés sont valables pour tout a, b, c et d réels sous réserve que les dénominateurs des fractions considérées ne sont pas nuls.

• Somme :
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

• Produit :
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

• Quotient :
$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$
 et
$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$

• UNE SEULE RÈGLE DE SIMPLIFICATION !
$$\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}$$

• Manipulations de puissances

Soit $q > 0, r > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

•
$$q^{a+b} = q^a \times q^b$$

•
$$\frac{q^a}{q^b} = q^{a-b}$$

$$\frac{q^a}{q^b} = \frac{1}{q^{b-a}}$$

•
$$q^{a \times b} = (q^a)^b = (q^b)^a = q^{b \times a}$$

•
$$q^{-1} = \frac{1}{q}$$

•
$$(q \times r)^a = q^a \times r^a$$

I.2. Propriétés de la fonction ln et de la fonction exp

• Propriétés de la fonction logarithme népérien

Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

et

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

• Propriétés de la fonction exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

et

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

(redite des manipulations de puissance dans le cas $q = e$)

II. Calculs algébriques dans l'ensemble $\{0, 0^+, 0^-, 1, \infty, +\infty, -\infty\}$

Les règles données ci-dessous ne doivent pas apparaître dans vos copies. Il s'agit simplement ici de mettre en avant certaines des opérations importantes données dans les tableaux des limites.

Remarque

- La quantité 0 (et ses dérivées 0^+ et 0^-) est désignée ici sous le terme **petit**.
- Par opposition, la quantité ∞ est elle désignée par le terme **grand**. Plus précisément :
 - $+\infty$: « grand dans les positifs »,
 - $-\infty$: « grand dans les négatifs » (l'écart à 0 est grand).

1. Diviser par grand revient à multiplier par petit

On entend par là la règle : $\frac{1}{\infty} = 0$

- Plus précisément, on obtient les règles suivantes.

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\frac{1}{-\infty} = 0^-$$

- On obtient en particulier la règle suivante.

$$\frac{0}{\infty} = 0 \times \frac{1}{\infty} = 0 \times 0 = 0$$

2. Diviser par petit revient à multiplier par grand

On entend par là la règle : $\frac{1}{0} = \infty$

- Plus précisément, on obtient les règles suivantes.

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

- On obtient en particulier la règle suivante (on peut écrire des cas similaires avec 0^- et $-\infty$).

$$\frac{+\infty}{0^-} = +\infty \times \frac{1}{0^-} = +\infty \times -\infty = -\infty$$

3. Les deux Formes Indéterminées (F.I.)

- Il faut savoir reconnaître les deux F.I. suivantes.

a) $+\infty - (+\infty)$

b) $0 \times \infty$

- Les autres formes indéterminées se déduisent de la dernière.

a) $\frac{0}{0} = 0 \times \frac{1}{0} = 0 \times \infty$

b) $\frac{\infty}{\infty} = \infty \times \frac{1}{\infty} = \infty \times 0$