Feuille d'exercices n°10 : Limites de fonctions et continuité en un point

Calcul de limites

Exercice 1. ($\bigstar$)
Déterminer les limites des fonctions suivantes.

a. Limite de $f(x) = \dfrac{-5x^2+37x-4}{8x^2-2}$ en $+\infty$.

b. Limite de $g(x) = \dfrac{x^7-1}{52x^6+3x^2-2x}$ en $-\infty$.

c. Limite de $f(x) = \dfrac{x^7\,e^x - x\,e^{2x}}{x^3(\ln x)+x(\ln x)^5}$ en $+\infty$.

d. Limite de $g(x) = \dfrac{xe^x+x^2+e^{x^3}}{x^7+5}$ en $-\infty$.

e. Limite de $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ en $+\infty$.

f. Limite de $f(x) = \sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}$ en $+\infty$.

g. Limite de $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$.

h. Limite de $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}$ en $+\infty$.

i. Limite de $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x}}\,e^{\frac{1}{x(x-1)}}$ en 0^+.

Exercice 2. ($\bigstar$)
Déterminer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{9x^3}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln x)^4}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{2x^2-3x+2}{x^2-9}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to1} \ln(x+3)-\ln(x-1)$

e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}$

g. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$

h. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

i. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{(x^3)^x}{(3^x)^3}$

j. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x+3)-\ln(x-1)$

k. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-2\ln x$

l. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{\sqrt{x}+1}$

m. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4\,e^{-\sqrt{x}}$

n. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^3}}{x}$

Calcul de limites par changement de variable

Exercice 3. ($\bigstar$)
Déterminer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ \ln(x)$ *(on pourra poser $X=\frac{1}{x}$)*

b. $\displaystyle\lim_{x\to1^+} (x-1)^2\ \ln(x-1)$ *(on pourra poser $X=x-1$)*

c. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^2\ e^{\frac{1}{x}}$ *(on pourra poser $X=\frac{1}{x}$)*

d. $\displaystyle\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ *(on pourra poser $X=\sqrt{x}$)*

Utilisation du taux d'accroissement

Exercice 4. (★★)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que f est non nulle au voisinage de x_0.
On suppose enfin que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.

(autrement dit : $\ln(1+f(x)) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$*)*

2. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1+\mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 5. (★)
Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1+x^3\right)^{1/x}$

b. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1-5x)}{x}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

e. $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

g. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

h. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\ln x}$

i. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$

j. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)$

Exercice 6. (★★★)
Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$

Exercice 7. (★★)
On considère la fonction $f(x) = (\ln x)^{\ln(\mathrm{e}-x)}$ et on se propose de déterminer sa limite pour $x \to \mathrm{e}^-$ (e par valeurs strictement inférieures).

a. On pose $X = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de X.

b. Montrer que $\lim\limits_{X \to 1^-} \dfrac{\ln(1+\ln X)}{X-1} = 1$.

c. Montrer que $\lim\limits_{X \to 1^-} \dfrac{1+\ln(1-X)}{\ln(1-X)} = 1$.

d. En déduire que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \exp(-(1-X)\ln(1-X)\ H(X))$$

où $H(X)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{X \to 1^-} H(X) = 1$.

e. En déduire $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}^-} f(x)$.
(on pourra poser $T = 1 - X$)

Prolongement par continuité

Exercice 8. (★)
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis rechercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de cet ensemble de définition :

a. $f_1(x) = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{(x-2)^2}$

b. $f_2(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$

c. $f_3(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+2}}$

d. $f_4(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$

e. $f_5(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$

f. $f_6(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$

Limite à droite, limite à gauche

Exercice 9. (★)
Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue en a ?

b. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue en a ?

Exercice 10. (★)
Étudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes.

a. $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

b. $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5x-4}{2x+1} & \text{si} \quad x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

c. $x_0 = 0$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x - \mathrm{e}^{1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

d. $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} x \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

e. $x_0 = 1$ et $j(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

f. $x_0 = 0$ et $k(x) = \dfrac{x^2 + 2|x|}{x}$

Utilisation d'inégalités

Exercice 11. (★★)
Déterminer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor}$

b. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{\lfloor \frac{3}{x} \rfloor}$

Exercice 12. (★)
Déterminer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{x}$

b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x} + x^2 + \mathrm{e}^{x^3}}{x^3 + 5}$

Exercice 13. (★★)
On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x)}}$.
Le but est de trouver la limite de f en 1^-.

a. Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.

b. Démontrer que : $\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leqslant u$.

c. En déduire que : $\forall u > -1,\ u \times \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(1+u)}} \geqslant u \times \mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$.

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} u \times \mathrm{e}^{\frac{1}{u}}$ et conclure.

Exercice 14. (★)
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}$
Le but est de trouver la limite de f en 1^+.

a. Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.

b. Démontrer que : $\forall u > 0,\ 0 < \dfrac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{-u+u^2}} \leqslant (1-u)^3 \times \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$.

c. Déterminer $\displaystyle\lim_{u \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$ et conclure.

Calcul d'équivalents

Exercice 15. (★★★)
Donner un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - \ln x}{2 + x\mathrm{e}^{-x}}$

b) $g(x) = x^2\left(\ln(1+x)\right)^4$

c) $h(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

d) $j(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln x$

Limites infinies, définitions équivalentes

Exercice 16. (★★)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a. f admet la limite $+\infty$ en x_0.

b. $\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B)$

c. $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B)$

Exercice 17. (★★)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a. f admet la limite $-\infty$ en x_0.

b. $\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B)$

c. $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant B)$

Exercice 18. (★★)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$.
Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a. f admet la limite $-\infty$ en $+\infty$.

b. $\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B)$

c. $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant B)$

Démonstration « avec les ε »

Exercice 19. (★★★)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.

a. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to x_0^-} (f+g)(x) = +\infty$$

Quel énoncé peut-on écrire quand $x \to x_0^+$?

b. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

c. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \ell_1 \ell_2$$

On pourra remarquer que :
$f(x)g(x) - \ell_1\ell_2 = f(x)(g(x) - \ell_2) + \ell_2(f(x) - \ell_1)$.

Exercice 20. (★★★)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.
Montrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ bornée} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = 0$$