CH XI : Étude globale des fonctions réelles d'une variable réelle

I. Propriétés générales des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$

Dans la suite, I sera un intervalle (même si la plupart des opérations restent vraies sur une réunion d'intervalles).

I.1. Fonctions paires / impaires

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **paire** si : $\boxed{\forall x \in I, \quad f(-x) \ = \ f(x)}$

Pour que cette définition soit valide, il faut supposer que les quantités $f(x)$ et $f(-x)$ sont bien définies. Il faut donc que la fonction f soit définie sur un intervalle I symétrique :

$$x \in I \Rightarrow -x \in I$$

Remarque

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Ainsi, si f paire, alors f n'est pas injective (sauf si $I = \{0\}$).
- On peut écrire une version « sans les x » de cette définition.
  Soit I un intervalle symétrique. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est paire si :

$$\boxed{f \circ (-\mathrm{id}) = f}$$

Exemple

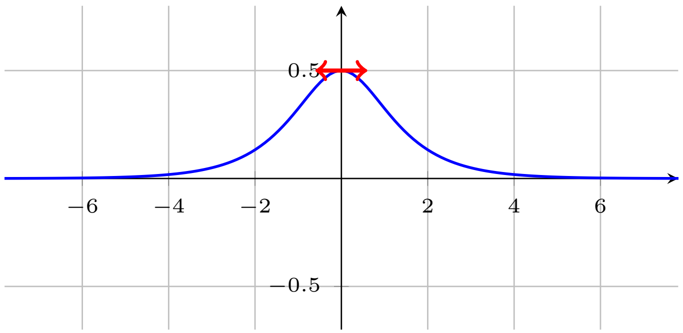
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

Donner son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ et démontrer que f est paire.

- La quantité $f(x)$ est définie pour tout x tel que : $\mathrm{e}^{2x}+1 \neq 0$. Or $\mathrm{e}^{2x}+1 > 0$.
  On en déduit que $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1} \ = \ \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}+1} \ = \ \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{1+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}}} \ = \ \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} \ = \ \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1} \ = \ f(x)$$

On en déduit que f est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition

Soit I un intervalle symétrique.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **impaire** si : $\boxed{\forall x \in I, \quad f(-x) \ = \ -f(x)}$

Remarque

- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.
- Soit I un intervalle symétrique. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est impaire si :

$$\boxed{f \circ (-\mathrm{id}) \ = \ (-\mathrm{id}) \circ f}$$

Propriété *(jouons avec la définition ...)*

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1) $\boxed{f \text{ paire } \Rightarrow\ g \circ f \text{ paire}}$

2) $\boxed{f \text{ et } g \text{ impaires } \Rightarrow\ g \circ f \text{ impaire}}$

3) $\boxed{f \text{ impaire et } g \text{ paire } \Rightarrow\ g \circ f \text{ paire}}$

Démonstration.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f(-x) \ = \ g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est paire.
On aurait pu faire une démonstration « sans les x » :

$$(f \circ g) \circ (-\mathrm{id}) = f \circ (g \circ (-\mathrm{id})) = f \circ g$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-(f(x))) = -g(f(x)) = -g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est impaire.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f \circ (-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est paire.

I.2. Bornes d'une fonction

I.2.a) Notion de minorant / majorant

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) f est **minorée** (sur I) si elle admet un minorant :

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ m \leqslant f(x)}$$

2) f est **majorée** (sur I) si elle admet un majorant :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M}$$

3) f est **bornée** (sur I) si elle est à la fois majorée et minorée :

$$\boxed{\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I,\ m \leqslant f(x) \leqslant M}$$

ce qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M}$$

Remarque

Si une fonction f admet un majorant M (resp. un minorant m) alors elle en admet une infinité. En effet, tout élément plus grand que M (resp. plus petit que m) est un majorant (resp. minorant) de f.

□ Les bornes m et M évoquées dans ces définitions ne sont pas forcément des valeurs prises par f.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ est majorée par 1 (donc par 1.1, 1.5, e, 37, 10^{18} ...) mais 1 n'est pas atteint par f.

I.2.b) Notion de minimum / maximum global

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) f admet un **minimum** sur l'intervalle I si :

$$\boxed{\exists x_0 \in I, \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0)}$$

Si tel élément existe, on dit que f atteint son **minimum** au point x_0.

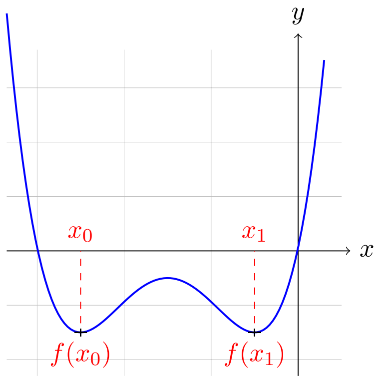
2) f admet un **maximum** sur l'intervalle I si :

$$\boxed{\exists x_0 \in I, \forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0)}$$

Si tel élément existe, on dit que f atteint son **maximum** au point x_0.

Remarque

- S'il existe, le maximum (resp. minimum) d'une fonction sur I est unique. Cependant, ce maximum peut être atteint en plusieurs points de I.
- Le maximum (resp. minimum) de f sur I, s'il existe, est un majorant (resp. minorant) de f qui est atteint par f.



La fonction f admet le minimum $-\frac{3}{2}$. Ce minimum est atteint en les deux points x_0 et x_1 :

- $f(x_0) = -\frac{3}{2}$.
- $f(x_1) = -\frac{3}{2}$.

I.2.c) Notion de minimum / maximum local

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1) On dit que f admet un **maximum local** en x_0 si :

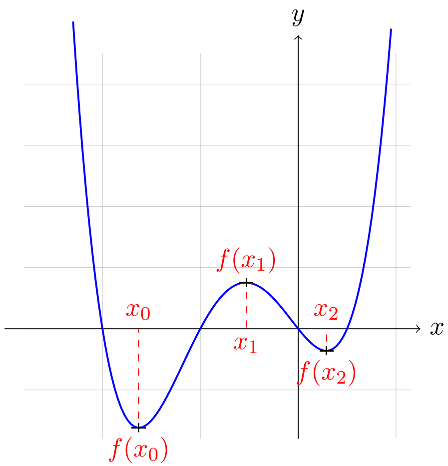
$$\boxed{\exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(x_0)}$$

2) On dit que f admet un **minimum local** en x_0 si :

$$\boxed{\exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x_0) \leqslant f(x)}$$

Remarque

- Une fonction f peut admettre plusieurs maxima (resp. minima) locaux.
- Un maximum (resp. minimum) local d'une fonction f est un majorant (resp. minorant) local de f.



La fonction f admet :

- un minimum local en x_0.
- un maximum local en x_1.
- un minimum local en x_2.

La fonction f :

- n'admet pas de maximum.
- admet un minimum (global) au point x_0.

La fonction f n'admet pas de majorant. Elle admet une infinité de minorants : tout réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant f(x_0)$ est un minorant de f. Parmi ses minorants, on peut distinguer celui qui a le plus d'intérêt.

I.2.d) Notion de borne supérieure / inférieure

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

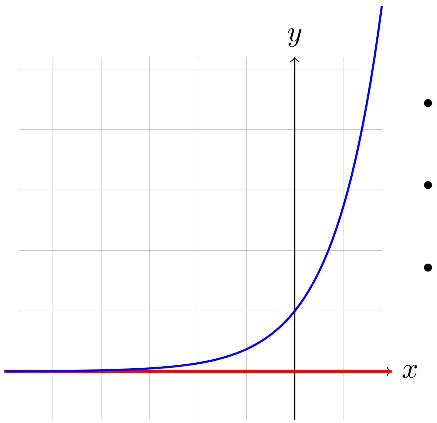
1) Si f est minorée sur I, on appelle **borne inférieure de** f sur I le plus grand des minorants de f sur I. Cet élément est noté $\inf\limits_I\ f$ ou $\inf\limits_{x\in I}\ f(x)$.

2) Si f est majorée sur I, on appelle **borne supérieure de** f sur I, le plus petit des majorants de f sur I. Cet élément est noté $\sup\limits_I\ f$ ou $\sup\limits_{x\in I}\ f(x)$.

3) Si f est bornée sur I, on peut donc définir $\sup\limits_I\ |f|$.

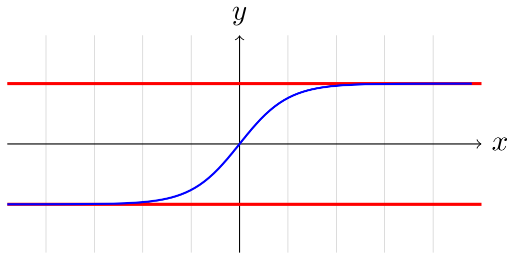
> La borne supérieure (resp. inférieure) de f n'est pas forcément une valeur atteinte par f. Si c'est le cas il s'agit du minimum (resp. maximum) de la fonction.
>
> - si $\inf\limits_I\ f \in f(I)$, alors $\inf\limits_{x\in I}\ f(x) = \min\limits_{x\in I}\ f(x)$
> - si $\sup\limits_I\ f \in f(I)$, alors $\sup\limits_{x\in I}\ f(x) = \max\limits_{x\in I}\ f(x)$

- Considérons la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.



- La fonction f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.
- Elle est minorée par tout réel $m \leqslant 0$.
- Sa borne inférieure est : $\inf\limits_{\mathbb{R}}\ f = 0$.

- La fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ n'admet pas de minimum / maximum.



- La fonction g n'admet pas de minimum / maximum.
- Elle est minorée par tout réel $m \leqslant -1$.
- Elle est majorée par tout réel $M \geqslant 1$.
- $\inf\limits_{\mathbb{R}}\ g = -1$ et $\sup\limits_{\mathbb{R}}\ g = 1$.

I.3. Fonctions monotones

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) La fonction f est **croissante** sur I si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)}$$

2) La fonction f est **strictement croissante** sur I si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y)}$$

3) La fonction f est **décroissante** sur I si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant f(y)}$$

4) La fonction f est **strictement décroissante** sur I si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)}$$

5) La fonction f est **monotone** sur I si :

$$(f \text{ est croissante sur } I)\ \texttt{OU}\ (f \text{ est décroissante sur } I)$$

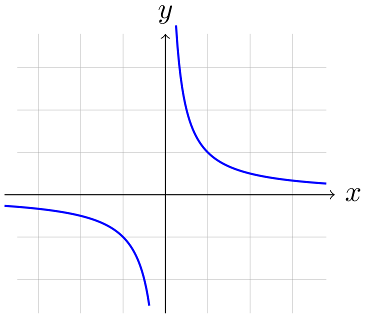
On définit de même la notion de **stricte monotonie**.

Remarque

- Une fonction qui n'est pas croissante n'est pas forcément décroissante. La négation du caractère croissant est :

$$\exists (x,y) \in I^2,\ (x \leqslant y)\ \texttt{ET}\ (f(x) > f(y))$$

- Il est important de préciser l'intervalle d'étude.



- La fonction inverse **n'est pas** décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
- Elle est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.
- Elle est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Si f est croissante (resp. décroissante) alors $-f$ est décroissante (resp. croissante). Le résultat est le même en cas de stricte monotonie.

Proposition 1.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective de I sur $\mathbb{R}$.

2) Si f est strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Démonstration.
On fait la démonstration dans le cas de la croissance (autre cas analogue).

1) Supposons f strictement croissante. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Quitte à renommer x_1 et x_2, supposons $x_1 < x_2$. Par stricte croissance de f, on a : $f(x_1) < f(x_2)$ et donc : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2) L'image de f coïncide avec son ensemble d'arrivée. La fonction f est donc surjective. Étant de plus injective (cf précédent), elle réalise une bijection de I sur $f(I)$. □

Théorème 1. *(théorème de la limite monotone)*

Soit f une fonction monotone sur $I =]a, b[$ $(a < b)$.
(avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

*1) Si $x_0 \in I$: f admet une limite **finie** à gauche et à droite en x_0.*

2) Si $x_0 = a$: f admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0.

a) si f est croissante, $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

b) si f est décroissante, $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

3) Si $x_0 = b$: f admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0.

a) si f est croissante, $\boxed{\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

b) si f est décroissante, $\boxed{\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

Démonstration. (CULTURE)
Pour faire la démonstration, il faut connaître la notion de borne supérieure (et inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ et sa caractérisation.

Si $E \subset \mathbb{R}$ alors le plus petit des majorants de E, lorsqu'il existe, est appelé borne supérieure de E et est noté $M = \sup E$.
On peut caractériser cette borne supérieure M de la façon suivante.

- $\forall x \in E,\ x \leqslant M$ (M est un majorant)
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E,\ M - \varepsilon < x$ ($M - \varepsilon$ n'est jamais un majorant)

On se limite ici au cas où f est croissante (cas f décroissante analogue) et on s'intéresse au cas $x_0 = b$. On distingue alors deux cas :

× soit f est majorée.
On note alors $M = \sup\limits_{x \in I} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I\}$.
Soit $\varepsilon > 0$. De par la caractérisation précédente, on sait que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{f(x) \mid x \in I\}$.
Ainsi, il existe $u \in I$ (*i.e.* $a < u < b$) tel que : $M - \varepsilon < f(u) \leqslant M$.
Pour tout x tel que $u \leqslant x < b$, on a, par croissance de f :

$$M - \varepsilon < f(u) \leqslant f(x) \leqslant M$$

En notant $\alpha = b - u > 0$, on a donc :

$$\forall x \in I, (b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow\ |f(x) - M| \leqslant \varepsilon)$$

× soit f est non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme f non majorée, il existe $u \in I$ (*i.e.* $a < u < b$) tel que : $f(u) > A$.
Pour tout x tel que $u \leqslant x < b$, on a, par croissance de f :

$$A < f(u) \leqslant f(x)$$

En notant $\alpha = b - u > 0$, on a donc :

$$\forall x \in I, (b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow\ f(x) > A)$$

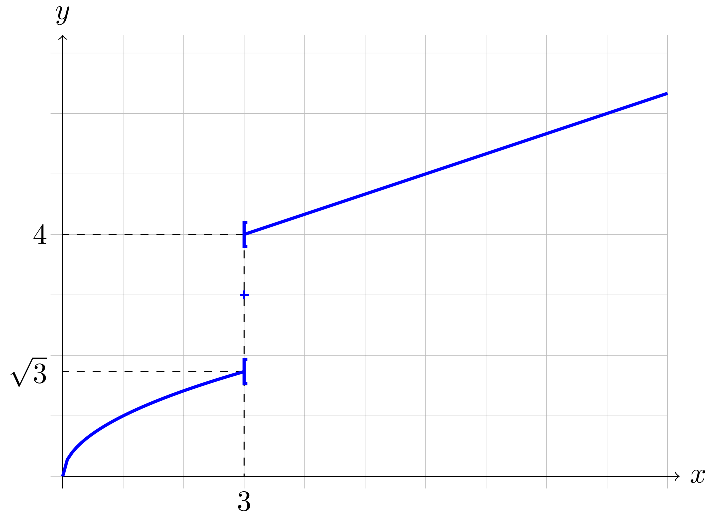
□

Ceci ne signifie pas qu'une fonction monotone admet une limite en tout point de $]a, b[$. Par exemple, on peut considérer la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \\ \dfrac{1}{3}x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

qui est (strictement) croissante mais n'admet pas de limite en 3.

Représentation graphique



Comme f est croissante, le Théorème 1 permet d'affirmer que la fonction f admet une limite à gauche et à droite en tout point $x_0 \in I$.
C'est notamment le cas en $x_0 = 3 \in [0, +\infty[$. Détaillons ce cas :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{3}x + 3 = 4$

Pour autant, cela ne signifie pas que f est continue en 3.
Ce n'est pas le cas puisque : $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

II. Continuité sur un intervalle

II.1. Continuité globale

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
- Autrement dit, f est continue sur I si elle admet une limite finie en tout point de I. Ceci s'écrit :

$$\boxed{\forall x_0 \in I, \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)}$$

Remarque

- On peut simplifier l'écriture précédente. En effet, comme f est continue en x_0 et définie en x_0, on a : « $\ell = f(x_0)$ ».
- Ainsi, f est continue sur I si :

$$\boxed{\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon)}$$

II.2. Opérations algébriques sur les fonctions continues

Théorème 2.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors les fonctions $f + g$, λf, $f \times g$ sont des fonctions continues sur I.
De plus, si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont aussi continues sur I.

Démonstration.
On obtient ce résultat en appliquant à tous les points de I le résultat analogue énoncé dans le chapitre précédent (continuité en un point). □

Théorème 3.

1) *Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.*

2) *Toute fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur tout intervalle I sur lequel Q ne s'annule pas.*

Démonstration.

1) La fonction $x \mapsto 1$ et la fonction $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$). On en déduit par somme, produit et produit par un réel que les fonctions polynomiales sont continues.

2) La fonction f est continue sur I par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. □

Application

De par ces propositions sur les opérations algébriques et la composition, on pourra rédiger comme suit :
f est une continue sur I car f est la somme / produit / quotient (attention au dénominateur) de fonctions continues sur I.

Exemple

1) On considère la fonction $f : x \mapsto x\ln(x) - 1$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car elle est la somme des fonctions :
- × $x \mapsto x\ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit des fonctions :
  - ***(i)*** $x \mapsto x$ polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,
  - ***(ii)*** $x \mapsto \ln(x)$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- × $x \mapsto -1$ constante donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ définie notamment sur $]0, +\infty[$.
La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est le quotient de :
- × la fonction $x \mapsto e^{2x} + 1$, continue sur $]0, +\infty[$.
- × et de la fonction $x \mapsto e^{2x} - 1$, continue sur $]0, +\infty[$ **et qui ne s'annule pas sur** $]0, +\infty[$.

II.3. Composée de deux fonctions continues

Proposition 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle J.

On suppose de plus que : $f(I) \subset J$ (pour que $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ soit bien définie).

Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.

Démonstration.
Encore une fois, ce résultat global est un corollaire direct du résultat du chapitre précédent sur la limite en un point de la composée $g \circ f$. □

Exemple

1) Si f est continue sur I, alors : f^2, $|f|$, $\exp(f)$ sont continues sur I.

2) Si f est continue et positive sur I, $\sqrt{f}$ et $\ln(f)$ sont continues sur I.

3) Dans la pratique, on rédigera comme suit.

a) Considérons la fonction $h : t \mapsto \ln(1+t)$ définie sur $]-1,+\infty[$.
La fonction h est continue sur $]-1,+\infty[$ car c'est la composée de :

× $g : t \mapsto t+1$, continue sur $]-1,+\infty[$ car polynomiale.
De plus, $g(\,]-1,+\infty[\,) \subset \,]0,+\infty[$.

× et de $f : t \mapsto \ln(t)$, continue sur $]0,+\infty[$.

b) Considérons la fonction $h : t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ définie sur $[0,+\infty[$.
La fonction h est continue sur $[0,+\infty[$ car c'est la composée de :

× $g : t \mapsto \sqrt{t}$, continue sur $[0,+\infty[$.
De plus, $g(\,[0,+\infty[\,) \subset \mathbb{R}$.

× et de $f : t \mapsto e^t$, continue sur $\mathbb{R}$.

II.4. Fonctions continues par morceaux

Définition *(continuité par morceaux sur un segment)*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

1) $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est continue *(i.e. continue sur $]a_i, a_{i+1}[$)*,

2) $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Remarque *(bien comprendre cette définition)*
Naturellement, on a envie de poser la définition suivante :
« f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si l'on peut découper l'intervalle en morceaux (les $]a_i, a_{i+1}[$) tel que f est continue sur chaque morceau ».

Ceci correspond au point ***1)*** de la définition. Par ajout du point ***2)*** on impose de plus que f ne peut admettre une limite infinie en les points a_i.

Définition (équivalente)
La fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
- f admet une limite finie à droite en a_i,
- f admet une limite finie à gauche en a_{i+1}.

(et ces limites ne sont pas forcément égales et peuvent aussi être différentes de $f(a_i)$ et $f(a_{i+1})$)

Exemple
On considère la fonction suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [1,5] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1-x & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ 8 & \text{si } x = 3 \\ 3x+5 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases} \end{array} \right.$$

f n'est pas continue sur $[1,5]$ car elle n'est pas continue au point 3 :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -2 \neq 14 = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

Par contre, f est continue par morceaux sur $[1,5]$.
En effet, si l'on prend $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, on a :

- f est continue sur $]1,3[$ et sur $]3,5[$.
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 1 - x = 0$ (limite finie)

  $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 - x = -2$ (limite finie)

  $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 3x + 5 = 14$ (limite finie)

  $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} 3x + 5 = 20$ (limite finie)

Remarque

- On peut étendre cette définition à un intervalle I quelconque.
  Une fonction f est dite **continue par morceaux sur un intervalle** I si elle est continue par morceaux sur tout segment $[a,b] \subset I$.
- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est continue par morceaux sur tout segment $[a,b]$ (avec a, b dans $\mathbb{R}$).

III. Les grands théorèmes de la continuité sur I

III.1. Théorème des valeurs intermédiaires

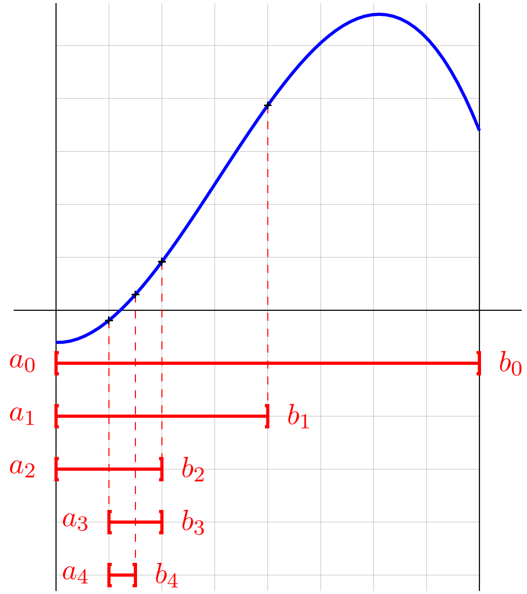
Théorème 4. *(Théorème des Valeurs Intermédiaires)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ***intervalle*** *I.*
Si a et b sont deux points de I ($a < b$) tels que : $f(a)f(b) \leqslant 0$.
Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration.

a) Cas $f(a) = f(b) = 0$: trivial. Prendre $c = a$.

b) Cas $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$ (l'autre cas est analogue)

La démonstration se base sur une méthode dite « de dichotomie » qu'on peut résumer par le schéma suivant.



On construit une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ tels que :

- $f(a_n) \leqslant 0$,
- $f(b_n) \geqslant 0$.

On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence.

0) Initialement, on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

1) Si $f(c_0) \leqslant 0$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b$.
Si $f(c_0) > 0$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

2) ...

$\vdots$

n+1) On note $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
Si $f(c_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
Si $f(c_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Les suites (a_n) et (b_n) ainsi construites sont adjacentes. En effet :

- $a_{n+1} \geqslant a_n$,
- $b_{n+1} \leqslant b_n$,
- $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \cdots = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, (a_n) et (b_n) sont convergentes et convergent vers la même limite $c = \sup a_n = \inf b_n$. On note au passage que $a = a_0 \leqslant c \leqslant b_0 = b$.

Or, par définition de a_n et b_n, on a : $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$.
Comme f est continue, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont convergentes de limite $f(c)$.
Par passage à la limite dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$f(c) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(c) \geqslant 0$$

Ainsi, on a bien exhibé $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. $\square$

Remarque

- L'hypothèse $f(a)f(b) \leqslant 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.
- Ainsi, on peut formuler l'énoncé comme suit :

1) *f continue sur un intervalle I* ***2)*** *f change de signe sur I*	$\Rightarrow$	*f s'annule sur I*

- Le fait que I soit un intervalle est **primordial**.
Si I n'est pas un intervalle, on peut considérer la fonction inverse :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}\right.$$

  × $f(-1) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$,

  × f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

  Mais il n'existe pas d'élément $c \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$.
- On peut utiliser la contraposée de cet énoncé.

1) *f continue sur un intervalle I* ***2)*** *f ne s'annule pas sur I*	$\Rightarrow$	*f garde un signe constant sur I*

- Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) peut s'énoncer de plusieurs manières différentes. Nous allons maintenant lister ces différents énoncés, qui sont équivalents au premier.

Théorème 5. *(TVI - énoncé bis)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un **intervalle** *I.*

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

Alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur $[a, b]$.

Énoncé dans le cas $f(a) \leqslant f(b)$:

$$\boxed{\text{Si } z \in [f(a), f(b)] \quad \text{alors} \quad \exists \alpha \in [a, b],\ z = f(\alpha).}$$

Énoncé dans le cas $f(a) \geqslant f(b)$:

$$\boxed{\text{Si } z \in [f(b), f(a)] \quad \text{alors} \quad \exists \alpha \in [a, b],\ z = f(\alpha).}$$

Démonstration.
On fait la démonstration dans le cas $f(a) \leqslant f(b)$ (autre cas analogue).
Soit $z \in [f(a), f(b)]$. On considère alors la fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = f(x) - z$$

× $g(a) = f(a) - z \leqslant 0$ et $g(b) = f(b) - z \geqslant 0$,

× g est continue sur I.

Par le TVI (énoncé précédent), il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que : $g(\alpha) = 0$.
Autrement dit, on a : $f(\alpha) = z$. □

Autre formulation

Si $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème on a alors :

- Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $y = f(x)$ a (au moins) une solution dans l'intervalle $[a, b]$.
- Ou encore : tout élément y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède (au moins) un antécédent par f dans $[a, b]$.

Théorème 6. *(TVI - énoncé ter)*
L'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

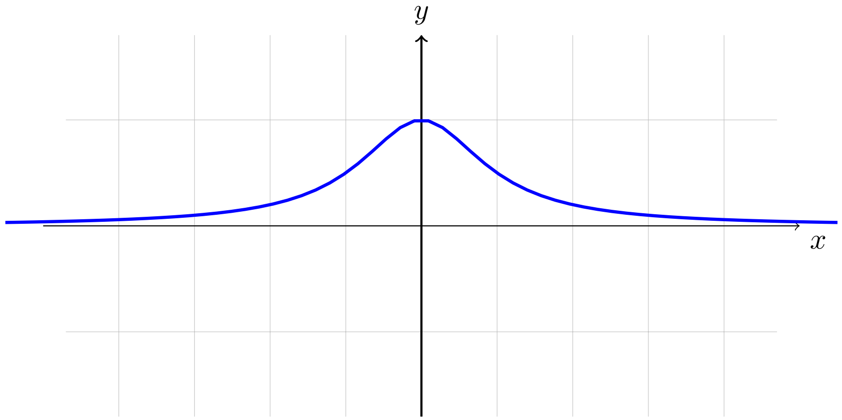
Démonstration.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.
Soient u et v deux éléments de $f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I,\ y = f(x)\}$.
On suppose (quitte à renommer ces éléments) que : $u < v$.

Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, il suffit de démontrer que toute valeur comprise entre u et v est dans $f(I)$.
Par définition de $f(I)$, il existe $a \in I$, tel que : $u = f(a)$.
De même, il existe $b \in I$ tel que $v = f(b)$.
Or, par le TVI (bis), pour tout $z \in [f(a), f(b)]$ il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $z = f(\alpha)$. Ainsi, $z \in f(I)$. □

Exemple

On considère la fonction $f : x \to \dfrac{1}{1 + x^2}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(]-\infty, +\infty[) =]0, 1]$.



Comme le prouve cet exemple, l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle qui n'est pas forcément de même nature.

Théorème 7. *(TVI - énoncé quater (!))*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un **intervalle** *I.*

Si f est majorée, on note $M = \sup\limits_I f$. On note $M = +\infty$ sinon.

Si f est minorée, on note $M = \inf\limits_I f$. On note $M = -\infty$ sinon.

Alors toute valeur $z \in]m, M[$ est atteinte par f sur I :

$$\forall z \in]m, M[, \exists \alpha \in I, \ z = f(\alpha)$$

Théorème 8. *(théorème des bornes)*

- *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*
- *L'image par une fonction continue d'un segment est un segment.*
  Ce qu'on écrit sous la forme : « $f([a, b]) = [m, M]$ ».

Démonstration.
La démonstration requiert des outils dont nous ne disposons pas en ECE.
Admis. □

III.2. Théorème de la bijection

Théorème 9.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction :

1) *continue sur I,*

2) *strictement monotone sur I.*

On a alors :

- *$f(I)$ est un intervalle,*
- *$f : I \to f(I)$ est une application bijective,*
- *$f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$.*
  Plus précisément, f^{-1} possède le même sens de monotonie que f.

Démonstration.

- $f(I)$ est un intervalle car c'est l'image d'un intervalle par une fonction continue (TVI - ter).
- La fonction $f : I \to f(I)$ est bijective (résultat de la Proposition 1).
- Montrons alors que $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi strictement monotone.
  Supposons f strictement croissante (le cas f décroissante est similaire).
  Il s'agit de montrer : $\forall (u_1, u_2) \in (f(I))^2, \ u_1 < u_2 \Rightarrow f^{-1}(u_1) < f^{-1}(u_2)$.

  Soient u_1 et u_2 deux éléments de $f(I)$. Ainsi :
  - il existe $x_1 \in I$ tel que $u_1 = f(x_1)$,
  - il existe $x_2 \in I$ tel que $u_2 = f(x_2)$.

  D'où $f^{-1}(u_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ et $f^{-1}(u_2) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$.
  L'implication à montrer s'écrit donc : $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$. On la démontre par contraposée : si $x_1 \geqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ car f est croissante.
- Il reste à démontrer que f^{-1} est continue sur $f(I)$. Admis. □

Autre formulation
Si $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème on a alors :

- Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $y = f(x)$ a une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.
- Ou encore : tout élément y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un unique antécédent par f dans $[a, b]$.

Théorème 10.

Soit I un intervalle d'extrémités a et b (éventuellement infinies).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.

1) *$f(I)$ est un intervalle d'extrémités $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.*

2) *De plus, les intervalles I et $f(I)$ sont de même nature :*

- × *fermés (comme $[1, 2]$, $[1, +\infty[$, $]-\infty, 2]$),*
- × *ouverts (comme $]1, 2[$, $]1, +\infty[$, $]-\infty, 2[$),*
- × *ou semi-ouverts (comme $]1, 2]$, $[1, 2[$).*

Remarque
Les tableaux de variation constituent un outil de base dans la rédaction des questions s'appuyant sur le théorème de la bijection. Une fois établi, un tel tableau permet la lecture rapide :

- × des intervalles I de stricte monotonie de f,
- × des intervalles $f(I)$ correspondants.

Exercice
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution u dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.
Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

a) • On a déjà démontré que f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Il faudrait alors faire l'étude de la dérivabilité de f (*cf* chapitre à venir) pour pouvoir en déduire le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		u		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$			
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

• Détaillons les différentes limites de ce tableau.

× $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{2x}+1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

× $f(0) = \dfrac{e^0}{e^{2\times 0}+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

× $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \dfrac{1}{e^x} \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$

Or $\dfrac{1}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $1 + \dfrac{1}{e^{2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

• La fonction f est :

1) continue sur $[0, +\infty[$,

2) strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. Or :

$$f([0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)\right] = \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

Comme $\frac{1}{4} \in [0, \frac{1}{2}[$, l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution $u \in [0, +\infty[$.

b) On introduit la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. *La question consiste à démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.*

- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme des fonctions f et $x \mapsto -x$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Il faudrait alors faire l'étude de la dérivabilité de f (*cf* chapitre à venir) pour pouvoir en déduire le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	
Variations de g	$+\infty$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

- Détaillons les différentes limites de ce tableau.
  × $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
  × $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = -\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
- La fonction g est :
  1) continue sur $]-\infty, +\infty[$,
  2) strictement décroissante sur $]-\infty, +\infty[$.
  Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $g(]-\infty, +\infty[)$. Or :
  $$g(]-\infty,+\infty[) \ = \ ]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to-\infty} g(x)[\ = \ ]-\infty,+\infty[$$
  Comme $0 \in \ ]-\infty,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \ ]-\infty,+\infty[$.
- Or, par définition, $\ell = f(\ell) \in [0, \frac{1}{2}]$ puisque f est à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$.

$\square$

Tableau récapitulatif.
Le tableau suivant permet de faire un point sur les différents types d'intervalles pouvant intervenir dans le Théorème 10.

	Nature de l'intervalle $f(I)$	
I	Cas f strictement croissante sur I	Cas f strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$