Théorème de la bijection : exemples de rédaction

Le but de cette fiche est de faire un point sur le théorème de la bijection. Après un retour sur l'énoncé et sa démonstration, on illustrera l'utilisation de ce théorème en agrégeant les questions rencontrées lors des DS de l'année 2013-2014. Cela devrait vous convaincre, je l'espère, qu'il n'est pas envisageable de perdre des points sur ces questions (toujours les mêmes !).

I. L'énoncé général du théorème

Théorème 1. *Théorème de la bijection*
On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I.

1) f continue sur I, ***2)*** f strictement croissante sur I.	$\Longrightarrow$	***a)*** $f(I)$ est un intervalle, ***b)*** $f : I \to f(I)$ est bijective, ***c)*** $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement croissante sur $f(I)$.

1) f continue sur I, ***2)*** f strictement décroissante sur I.	$\Longrightarrow$	***a)*** $f(I)$ est un intervalle, ***b)*** $f : I \to f(I)$ est bijective, ***c)*** $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement décroissante sur $f(I)$.

Démonstration. (Cas où f est strictement croissante)

a) $f(I)$ est un intervalle car image d'un intervalle par une fonction continue (c'est une des conséquences du TVI).

b)
- La fonction $f : I \to f(I)$ est surjective puisque son ensemble d'arrivée coïncide avec son image.
- De plus, comme f est strictement croissante, elle est injective.

La fonction f est donc bijective de I sur $f(I)$.

c) Montrons que $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi strictement monotone.
Il s'agit de montrer : $\forall (u_1, u_2) \in (f(I))^2,\ u_1 < u_2 \Rightarrow f^{-1}(u_1) < f^{-1}(u_2)$.

Soient u_1 et u_2 deux éléments de $f(I)$. Ainsi :

× il existe $x_1 \in I$ tel que $u_1 = f(x_1)$,

× il existe $x_2 \in I$ tel que $u_2 = f(x_2)$.

D'où $f^{-1}(u_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ et $f^{-1}(u_2) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$.
L'implication à montrer s'écrit donc : $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$. On la démontre par contraposée : si $x_1 \geqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ car f est croissante. Le caractère continu de f^{-1}, plus technique, n'est pas démontré ici. □

Remarque

- Le point ***a)*** est une conséquence du TVI et est essentiel pour démontrer le caractère continu de f^{-1}. Le théorème de la bijection est donc souvent présenté comme un corollaire du TVI. Toutefois, citer le TVI au lieu du théorème de la bijection sera considéré comme une erreur de rédaction : les hypothèses et résultats du théorème de la bijection sont plus précis.
- La démonstration du point ***c)*** fait apparaître la propriété suivante.
Pour tout x_1, x_2, α éléments de $\mathcal{D}_f$:

$$\boxed{f(x_1) < f(\alpha) < f(x_2) \quad \xRightarrow{f^{-1} \text{ strictement croissante}} \quad x_1 < \alpha < x_2}$$

Évidemment, cette propriété est aussi vérifiée pour des inégalités larges.
Cette propriété donne aussi souvent lieu à des questions dans les concours.

II. L'énoncé adapté aux questions

Théorème 2.
On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I.

1) f continue sur I, ***2)*** f strictement monotone sur I.	$\Rightarrow$	Alors pour tout $y \in f(I)$, l'équation $y = f(x)$ admet une **unique** solution $x \in I$.

Démonstration.
C'est un corollaire direct du théorème 1.
La fonction $f : I \to f(I)$ est bijective. On en déduit que tout élément $y \in f(I)$ admet un unique antécédent x dans l'intervalle I. □

Remarque

- Les questions nécessitant ce théorème sont facilement repérables :
  « Montrer qu'il existe un **unique** $\alpha \in \ldots$ tel que ... »
  « Montrer que l'équation $f(x) = \ldots$ admet une **unique** solution dans ... »
- La rédaction correcte d'une telle question demande de la rigueur. Une erreur classique et lourdement pénalisée consiste à oublier de préciser les intervalles considérés (I et $f(I)$).
- Le théorème suivant permet de préciser la nature de l'intervalle $f(I)$.

Théorème 3.
Soit I un intervalle d'extrémités a et b (chacune pouvant être infinie).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.

a) *Alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémités $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$.*

b) *De plus, les intervalles I et $f(I)$ sont de même nature :*
- *fermés (comme $[1, 2]$, $[1, +\infty[$, $]-\infty, 2]$),*
- *ouverts (comme $]1, 2[$, $]1, +\infty[$, $]-\infty, 2[$),*
- *ou semi-ouverts (comme $]1, 2]$, $[1, 2[$).*

Tableau récapitulatif.
Le tableau suivant permet de faire un point sur les différents types d'intervalles rencontrés.

	Nature de l'intervalle $f(I)$	
I	Cas f strictement croissante sur I	Cas f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \to b} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$
$]a, b[$	$]\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \to b} f(x), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$

Remarque

Les tableaux de variation constituent un outil de base dans la rédaction des questions s'appuyant sur le théorème de la bijection. Une fois établi, un tel tableau permet la lecture rapide :
- des intervalles I de stricte monotonie de f,
- des intervalles $f(I)$ correspondants.

Nous considérerons dans les illustrations suivantes que les tableaux de variations sont déjà réalisés.
(en cas de doute, se référer aux corrigés précédemment fournis)

III. Illustration sur des exemples

III.1. Énoncé du DS1

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$.

Cette fonction est C^∞ sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$ et son tableau de variation (complété avec les informations prouvées ci-dessous) est :

x	0	$\frac{1}{2}$	α	1	$+\infty$
Signe de $g(x)$	‖		$+$		
Signe de $f'(x)$	‖		$+$		
Variations de f	‖ $-\infty$	< 0	0	2	$+\infty$

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_f$.
On la notera α.

b. Montrer que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Démonstration.

a. On sait que :

1) f est continue sur $]0, +\infty[$,

2) f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, $f(]0, +\infty[) =] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$.

Or $0 \in]-\infty, +\infty[$. On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in]0, +\infty[$.

b. On remarque que :

- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} - 4\ln 2 < 0$,
- $f(\alpha) = 0$,
- $f(1) = 2 > 0$.

Ainsi on a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(\alpha) < f(1)$.

Or, d'après le théorème de la bijection, $f^{-1} :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ est strictement croissante. En appliquant f^{-1} à l'inégalité précédente, on obtient : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

□

III.2. Énoncé du DS5

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

En posant $f(0) = 1$, on prolonge la fonction f en une fonction C^∞ sur $\mathcal{D}_f = [-1, +\infty[$ (faire l'étude !). Son tableau de variation (complété avec les informations prouvées ci-dessous) est :

x	-1	0	3	α	4	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	‖		$+$		
Variations de f	0		< 2	2	> 2	$+\infty$

a. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

b. Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
(on donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $\ln 5 \approx 1,61$)

Démonstration.

a. On sait que :

1) f est continue sur $[-1, +\infty[$,

2) f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

De plus, $f([-1, +\infty[) = [f(-1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [0, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$.

Or $2 \in [0, +\infty[$. On en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $x \in [-1, +\infty[$.

b. On remarque que :

- $f(3) = \dfrac{4\ln(4)}{3} = \dfrac{4\ln(2^2)}{3} = \dfrac{8\ln(2)}{3} < \dfrac{8}{3} \times 0,7 = \dfrac{5,6}{3} < 2,$
- $f(\alpha) = 2,$
- $f(4) = \dfrac{5\ln(5)}{4} > \dfrac{5}{4} \times 1,6 = 2.$

Ainsi on a : $f(3) < f(\alpha) < f(4)$.

Or, d'après le théorème de la bijection, $f^{-1} : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$ est strictement croissante. En appliquant f^{-1} à l'inégalité précédente, on obtient : $3 < \alpha < 4$.

$\square$

Remarque

Le fait qu'une seule flèche (et pas 2 !) soit dessinée dans le tableau de variation ne doit pas surprendre. En effet, on rappelle le résultat suivant (*cf* chapitre « Dérivabilité ») :

$f' \geqslant 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points	$\Rightarrow$	f strictement croissante sur I

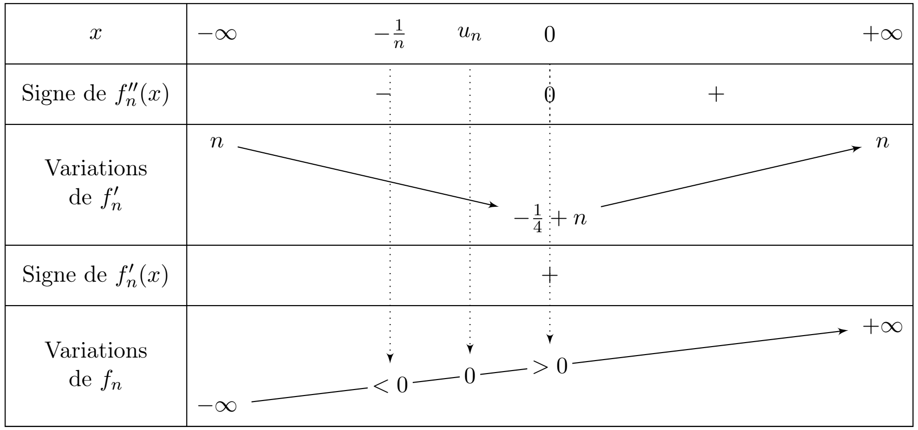
III.3. Énoncés du DS6

III.3.a) Énoncé de l'exercice 2

Exercice 3
Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + n\ x$$

Cette fonction est C^∞ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et son tableau de variation (complété avec les informations prouvées ci-dessous) est :



a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
On note u_n cette solution.

b. Montrer qu'on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{-1}{n} < u_n < 0.$

Démonstration.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que :

1) f_n est continue sur $]-\infty, +\infty[$,

2) f_n est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

De plus, $f_n(]-\infty,+\infty[) \ = \ ]\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[\ = \ ]n, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ dans $]-\infty,+\infty[$.

Or $0 \in \ ]-\infty,+\infty[$. On en déduit que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x \in]-\infty,+\infty[$.

b. On remarque que :

- $f_n\left(\dfrac{-1}{n}\right) \ = \ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} - 1 = \dfrac{-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} < 0,$
- $f_n(u_n) \ = \ 0,$
- $f_n(0) \ = \ \dfrac{1}{2} > 0.$

Ainsi on a : $\quad f_n\left(\dfrac{-1}{n}\right) \ < \ f_n(u_n) \ < \ f_n(0).$

Or, d'après le théorème de la bijection, $f_n^{-1} : \ ]-\infty,+\infty[\ \to \ ]-\infty,+\infty[$ est strictement croissante. En appliquant f_n^{-1} à l'inégalité précédente, on obtient : $\quad \dfrac{-1}{n} \ < \ u_n \ < \ 0.$

$\square$

III.3.b) Énoncés de l'exercice 3

Exercice 4
Soit $a > 0$. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \exp[a(x-1)]$.

A) Cas où $a = 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

B) Cas où $a > 1$.

a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.
On notera $r(a)$ la plus petite.

b. Montrer que : $0 < r(a) < 1$.

Technique de démonstration.

- On souhaite trouver ici les solutions de l'équation $\boxed{f(x) = x}$.
- On ne peut appliquer directement le théorème de la bijection à f.
- On considère alors la fonction $\boxed{g : x \mapsto f(x) - x}$ de sorte que :

$$\boxed{f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0}$$

Démonstration. On note $g : x \mapsto f(x) - x$.

A) Cas où $a = 1$. On a alors le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$		0		$+\infty$

Ainsi, $g(x) = 0$ admet $x = 1$ comme unique solution.
Il en est de même de l'équation $f(x) = x$.

B) Cas où $a > 1$. On a le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$	0	$r(a)$	$1 - \frac{\ln a}{a}$	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$		0	$+$	
g	$+\infty$	e^{-a}	0	$g(1 - \frac{\ln a}{a})$	0	$+\infty$

On remarque que :

$$g\left(1 - \frac{\ln a}{a}\right) = e^{a(-\frac{\ln a}{a})} - \left(1 - \frac{\ln a}{a}\right) = \frac{1}{a} - 1 + \frac{\ln a}{a} < 0$$

(cf corrigé du DS)

a. Détaillons les éléments de ce tableau de variation.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 1 - \frac{\ln a}{a}[$.
  On sait que :
  1) g est continue sur $]-\infty, 1 - \frac{\ln a}{a}[$,
  2) g est strictement décroissante sur $]-\infty, 1 - \frac{\ln a}{a}[$.

De plus : $g(]-\infty, 1 - \frac{\ln a}{a}[) =]g(1 - \frac{\ln a}{a}), \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)[=]g(1 - \frac{\ln a}{a}), +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, la fonction g réalise une bijection de $]-\infty, 1 - \frac{\ln a}{a}[$ dans $]g(1 - \frac{\ln a}{a}), +\infty[$.

Or $0 \in]g(1 - \frac{\ln a}{a}), +\infty[$. On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $x \in]-\infty, 1 - \frac{\ln a}{a}[$.
L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur $]-\infty, 1 - \frac{\ln a}{a}[$.

- Sur l'intervalle $]1-\frac{\ln a}{a},+\infty[$.
  On sait que :
  1) g est continue sur $]1-\frac{\ln a}{a},+\infty[$,
  2) g est strictement croissante sur $]1-\frac{\ln a}{a},+\infty[$.

  De plus : $g(]1-\frac{\ln a}{a},+\infty[) \ =]g(1-\frac{\ln a}{a}), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[=]g(1-\frac{\ln a}{a}),+\infty[$.

  D'après le théorème de la bijection, la fonction g réalise une bijection de $]1-\frac{\ln a}{a},+\infty[$ dans $]g(1-\frac{\ln a}{a}),+\infty[$.

  Or $0 \in]g(1-\frac{\ln a}{a}),+\infty[$. On en déduit que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $x \in]1-\frac{\ln a}{a},+\infty[$.
  L'équation $f(x)=x$ admet donc une unique solution sur $]1-\frac{\ln a}{a},+\infty[$.

b. Notons tout d'abord que la plus petite solution de $f(x)=x$, notée $r(a)$ est dans l'intervalle $]-\infty,1-\frac{\ln a}{a}[$. On en déduit que $r(a) < 1-\dfrac{\ln a}{a} < 1$.

D'autre part, on a :

- $g(0) \ = \ e^{-a} \ > \ 0$,
- $g(r(a)) \ = \ 0$.

Ainsi on a : $\quad g(r(a)) \ < \ g(0)$.

Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction
$g^{-1} :]g(1-\frac{\ln a}{a}),+\infty[\ \to \ ]-\infty,1-\frac{\ln a}{a}[$ est strictement décroissante.
En appliquant g^{-1} à l'inégalité précédente, on obtient : $\quad 0 \ < \ r(a)$.

On en conclut : $\quad 0 \ < \ r(a) \ < \ 1$. □

Exercice 5

On considère la fonction f définie, pour $x\in[0,1]$ par : $\phi(x) = x\ e^{-x}$.
Cette fonction est C^∞ sur $[0,1]$ et son tableau de variation est :

x	0		1
Signe de $\phi'(x)$		$+$	
Variations de ϕ	0	$\nearrow$	e^{-1}

a. Montrer que ϕ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,\frac{1}{e}]$.

b. Montrer que sa fonction réciproque ϕ^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0,\frac{1}{e}]$.

c. Dresser le tableau de variation de ϕ^{-1}.

Démonstration.

a. On sait que :
1) ϕ est continue sur $[0,1]$,
2) ϕ est strictement croissante sur $[0,1]$.

De plus, $\phi([0,1]) \ = \ [\phi(0),\phi(1)] \ = \ [0,\frac{1}{e}]$.

D'après le théorème de la bijection, la fonction ϕ réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[0,\frac{1}{e}]$.

b. De plus, sa fonction réciproque $\phi^{-1} : [0,\frac{1}{e}] \to [0,1]$ est continue et strictement croissante sur $[0,\frac{1}{e}]$.

c. D'où le tableau de variation :

x	0		e^{-1}
Variations de ϕ^{-1}	0	$\nearrow$	1

□

III.3.c) Énoncé du problème A

Exercice 6
On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + 5x - 1$.
Cette fonction polynomiale est C^∞ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et son tableau de variation (complété avec les informations prouvées ci-dessous) est :

x	$-\infty$	0	α	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$			
Variations de f	$-\infty$	-1	0	$\frac{13}{8}$	$+\infty$

a. Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.

b. Établir que : $\quad 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

a. On sait que :

1) f est continue sur $]-\infty, +\infty[$,

2) f est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

De plus, $f(]-\infty, +\infty[) \ = \ ]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[\ = \ ]-\infty, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$.

Or $0 \in]-\infty, +\infty[$. On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in]-\infty, +\infty[$.

b. On remarque que :

- $f(0) \ = \ -1 \ < \ 0$,
- $f(\alpha) \ = \ 0$,
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \ = \ \dfrac{13}{8} \ > \ 0$.

Ainsi on a : $\quad f(0) \ < \ f(\alpha) \ < \ f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Or, d'après le théorème de la bijection, $f^{-1} : \ ]-\infty, +\infty[\ \to \ ]0, +\infty[$ est strictement croissante. En appliquant f^{-1} à l'inégalité précédente, on obtient : $\quad 0 \ < \ \alpha \ < \ \dfrac{1}{2}$.

□