Feuille d'exercices n°11 : Étude globale des fonctions

Fonction paires et impaires

Exercice 1. (☆)
Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

a) Si f et g sont paires, que peut-on dire de : $f+g$, $f-g$, $f \times g$?

b) Même question si f et g sont impaires.

c) Même question si f est paire et g impaire.

Exercice 2. (★★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

a) Montrer que f^{-1} est impaire.

b) Que peut-on dire lorsque f est paire ?
(commenter la pertinence de l'énoncé)

Exercice 3. (★)
Soit I un intervalle symétrique. Soient f et g deux fonctions $I \to \mathbb{R}$.

a) g paire $\Rightarrow$ $f \circ g$ paire.

b) f et g impaires $\Rightarrow$ $f \circ g$ impaire.

c) f paire et g impaire $\Rightarrow$ $f \circ g$ paire.

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 4. (★)
Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. (★)
Montrer que les équations suivantes ont une solution dans l'intervalle I :

a) $\ln x = \dfrac{x^2-5}{x+2}$ sur $I = [1, 10]$.

b) $x^{2015} - x^{2016} = -1$ sur $I = [-1, 1]$.

c) $x^n + 9x^2 - 4 = 0$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$ (n est un entier positif).

d) $x \ln x = 2$ sur $I = [2, 3]$.

Exercice 6. (★★)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x \in I,\ |f(x)| = 1$.

Montrer que f est constante sur I.

Exercice 7. (★★)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x \in I,\ f^2(x) = 1$.

Montrer que f est constante sur I.

Exercice 8. (★)
Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$.

Montrer que f admet un point fixe : $\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) = x_0$.
(on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$)

Exercice 9. (★)
Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

$$f(0) = g(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = g(0) = 1$$

Montrer que : $\forall \lambda \geqslant 0,\ \exists x_0 \in [0,1],\ f(x_0) = \lambda\, g(x_0)$.
(on pourra considérer la fonction $h : x \mapsto f(x) - \lambda\, g(x)$)

Continuité sur un segment

Exercice 10. (★★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$.

Montrer que f est bornée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. (★★★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure. Qu'en est-il de sa borne inférieure ?

Exercice 12. (★★)
Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x \in [-1,1],\ f(x) > 0$.

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $f(x) \geqslant m$.

Théorème de la bijection

Exercice 13. (★★)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on note : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer qu'il existe un unique u_n positif tel que $f_n(u_n) = 0$.

c) Calculer u_1.

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

e) En déduire le signe de u_n et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

f) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

g) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f_n(x) = \dfrac{2x - x^{n+1} - 1}{1 - x}$.

h) En déduire que : $2\,u_n - 1 = u_n^{n+1}$.

i) Démontrer que (u_n^{n+1}) converge vers 0 et en déduire la limite de (u_n).

Exercice 14. (★)
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ puis déterminer son signe.
Pour ce faire, on pourra étudier la fonction auxiliaire $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$ définie pour $x > -1$.

c) Montrer que f peut être prolongée par continuité à $[-1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

d) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

e) Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
On pourra utiliser le fait que : $\ln 2 \approx 0,69$ *et* $\ln 5 \approx 1,61$.

Exercice 15. (★)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$

a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer les limites de f_n quand $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
On notera u_n cette solution.

e) Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.

f) En déduire la limite de la suite (u_n).

g) En revenant à la définition de u_n, montrer que : $n\, u_n \to -\dfrac{1}{2}$.

Théorème de la limite monotone

Exercice 16. (★★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.
On souhaite démontrer que la fonction f admet un unique point fixe autrement dit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.
Pour ce faire, on considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

a) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

b) En déduire que f admet un point fixe.

c) En procédant par l'absurde, démontrer que ce point fixe est unique.

d) Ce résultat est-il valable si la fonction f est croissante ?

Exercice 17. (★★★)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur un intervalle I.
On suppose que $f(I)$ est un intervalle.
On souhaite démontrer que la fonction f est continue.

1. a) Soit $a \in \mathring{I}$. Démontrer que f admet une limite finie ℓ à droite en a qui vérifie : $f(a) \leqslant \ell$.

b) Démontrer que : $\forall x \in I,\ x \leqslant a \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(a)$.

c) Démontrer que : $\forall x \in I,\ x > a \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant \ell$.

Ceci permet de démontrer que f n'atteint aucune valeur entre $f(a)$ et ℓ.
On suppose maintenant par l'absurde que $f(a) < \ell$.

2. a) Si $b \in I$ est tel que $b > a$, démontrer que : $f(a) \leqslant \ell \leqslant f(b)$.
(question supplémentaire : pourquoi existe-t-il un tel élément b ?)

b) En déduire que ℓ est une valeur atteinte par f.

c) En déduire une contradiction.

d) En conclure que f est continue sur I.

3. Le résultat est-il valable si f est décroissante ?

(ce résultat est la brique manquante de la démonstration du théorème de la bijection présentée dans le cours)