# CH XII : Systèmes linéaires

## I. Généralités sur les systèmes linéaires

### Définition

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.

On appelle **système linéaire** de $n$ équations à $p$ inconnues $x_1$, …, $x_p$ tout système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 & & L_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 & & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n & & L_n \end{array}\right.$$

× les réels $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ sont les **cœfficients** du système.

× le $n$-uplet de réels $(b_1, \dots, b_n)$ est le **second membre** du système.

× la $i^{\text{ème}}$ équation du système est notée $L_i$ : c'est la $i^{\text{ème}}$ ligne du système.

× le système $(S)$ est dit **homogène** si $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.

× on appelle **système homogène associé à** $(S)$ et on note $(S_H)$ le système $(S)$ dont le second membre est remplacé par $(0, \dots, 0)$.

× on appelle **solution** de $(S)$ tout $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ qui satisfait les $n$ équations du système $(S)$.

× si $n = p$ le système $(S)$ sera dit **système de Cramer** s'il admet un unique $n$-uplet solution.

× deux systèmes $(S_1)$ et $(S_2)$ sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions. On notera alors : $(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$.

### Remarque

- Tout système homogène admet au moins une solution, le $p$-uplet $(0, \dots, 0)$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & 5\,y & + & z & = & 0 \\ -4\,x & + & 2\,y & + & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

admet $(0,0,0)$ pour solution.

- Un système homogène admettant le même nombre d'équations que d'inconnues $(n = p)$ est donc de Cramer ssi $(0, \dots 0)$ est son unique solution.
- Un système $(S)$ peut n'admettre aucune solution :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & -7 \\ -x & & & + & z & = & -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & -7 \\ & & y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Les lignes $L_2$ et $L_3$ sont dites **incompatibles**.

- Un système $(S)$ peut admettre une unique solution :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x & + & 2\,y & + & z & = & 5 \\ x & & & + & z & = & 7 \\ 2\,x & + & 2\,y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (1,-2,6)$$

- Un système $(S)$ peut admettre une infinité de solutions :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & -2 \\ -x & & & + & 2\,z & = & -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & -2 \\ & & y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & = & 3 & + & z \\ & & y & = & -2 & - & z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (5+2z, -2-z, z)$$

Ainsi, $(5,-2,0)$, $(7,-3,1)$, $(-1,1,-3)$ … sont solutions.

# II. Résolution d'un système linéaire

## II.1. Les systèmes échelonnés et triangulaires supérieurs

### Définition

Soit $(S)$ un système linéaire de $n$ équations et $p$ inconnues.

- Le système $(S)$ est dit **échelonné** lorsque :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], \quad i > j \ \Rightarrow \ a_{i,j} = 0$$

- Le système $(S)$ est dit **triangulaire (supérieur)** si :
  *1)* il a le même nombre d'équations que d'inconnues ($n = p$),
  *2)* il est échelonné.

Cette définition n'est pas très stricte. Par exemple, un système linéaire dont tous les cœfficients sont nuls, est un système échelonné.

## II.2. Résolution d'un système triangulaire (cas $n = p$)

Un système triangulaire supérieur à $n$ équations et $n$ inconnues est de la forme suivante.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{2,n}\,x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{i,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & a_{n,n}\,x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Si on suppose de plus que tous les cœfficients diagonaux sont non nuls, alors on peut résoudre aisément ce système « en cascade » :

× la dernière équation fournit : $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$.

× on substitue $x_n$ par sa valeur dans l'équation précédente, ce qui permet d'obtenir $x_{n-1}$.

Par remontées successives, on obtient de manière unique toutes les valeurs de $x_i$. On obtient ainsi un unique $n$-uplet solution.

Il est primordial de supposer que tous les cœfficients diagonaux sont non nuls. Par la suite, on nomme (H) cette hypothèse : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], a_{i,i} \neq 0}$.

**Théorème 1.**

*Soit $(S)$ un système linéaire tel que :*

× *$(S)$ a $n$ équations et $n$ inconnues,*

× *$(S)$ est triangulaire (supérieur),*

× *$(S)$ vérifie l'hypothèse* (H).

*Alors $(S)$ est un système de Cramer.*
*(ce qui revient à dire que $(S)$ possède une unique solution)*

### Exemple

On peut résoudre le système suivant en cascade.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\ & & 3\,y & + & 5\,z & + & 2\,t & = & -7 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & t & = & 2 \end{array}\right.$$

Par remontées successives, ce système admet une unique solution : $(8, -7, 2, 2)$.

### Remarque

Le caractère unique est fourni par les deux conditions : $n = p$ et H.
Si cette hypothèse (H) n'est pas vérifiée, alors :

× le système peut n'avoir aucune solution.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\ & & & & 5\,z & - & 2\,t & = & 8 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & t & = & 2 \end{array}\right.$$

× le système peut avoir une infinité de solution.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\ & & & & 5\,z & - & 2\,t & = & 6 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \\ & & & & & & t & = & 2 \end{array}\right.$$

### II.3. Résolution d'un système échelonné (cas $n < p$)

Un système échelonné est alors de la forme suivante.

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{1,n}\,x_n & + & \dots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{2,n}\,x_n & + & \dots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{i,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{i,n}\,x_n & + & \dots & + & a_{i,p}\,x_p & = & b_i \\ & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & a_{n,n}\,x_n & + & \dots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Plaçons-nous dans le cas où l'hypothèse (H) est vérifiée ($\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$).

- On va alors distinguer les inconnues $x_{n+1}, \dots, x_p$, appelées **inconnues auxiliaires**. En transférant ces inconnues auxiliaires dans le membre droit, on fait apparaître un membre gauche à $n$ lignes et $n$ colonnes, correspondant au cas précédent.

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 & - & a_{1,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{1,p}\,x_p \\ & & a_{2,2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{2,n}\,x_n & = & b_2 & - & a_{2,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{2,p}\,x_p \\ & & & & & & a_{i,i}\,x_i & + & \dots & + & a_{i,n}\,x_n & = & b_i & - & a_{i,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{i,p}\,x_p \\ & & & & & & & & & & a_{n,n}\,x_n & = & b_n & - & a_{n,n+1}\,x_{n+1} & - & \dots & - & a_{n,p}\,x_p \end{array}\right.$$

- Une résolution en cascade de ce système fournit alors toutes les valeurs de $x_i$ ($i \in [\![1,n]\!]$) en fonction des variables auxiliaires. On obtient ainsi une infinité de solutions.

**Théorème 2.**

*Soit $(S)$ un système linéaire tel que :*

- *$(S)$ a $n$ équations, $p$ inconnues et $n < p$,*
- *$(S)$ est échelonné,*
- *$(S)$ vérifie* (H).

*Alors $(S)$ possède une infinité de solutions.*

**Exemple**

On peut résoudre le système suivant en cascade.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\ & & 3\,y & + & 5\,z & + & 2\,t & = & -7 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

**Remarque**

L'existence de solution est fourni par la condition : (H).

Si cette hypothèse (H) n'est pas vérifiée alors :

× le système peut n'avoir aucune solution.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\ & & & & -2\,z & + & 2\,t & = & 5 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

× le système peut avoir une infinité de solutions.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2\,z & - & t & = & 3 \\ & & & & 5\,z & - & 2\,t & = & 6 \\ & & & & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

En conclusion, la résolution d'un système triangulaire supérieur est simple. Il convient donc d'essayer de transformer tout système en un système triangulaire supérieur. Ceci peut se faire à l'aide des opérations élémentaires.

## II.4. La méthode du pivot de Gauss

### II.4.a) Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

On commence par introduire la notion d'opération élémentaire, nécessaire pour décrire précisément la méthode du pivot.

**Définition**
On appelle **opération élémentaire sur les lignes** $L_1, \ldots, L_n$ d'un système $(S)$ l'une des trois opérations suivantes :

*1)* multiplier la ligne $L_i$ par un réel $\alpha \neq 0$ :

$$\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$$

*2)* ajouter à la ligne $L_i$ $\beta$ fois une autre ligne $L_j$ :

$$\boxed{L_i \leftarrow L_i + \beta L_j}$$

*3)* échanger les lignes $L_i$ et $L_j$ :

$$\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$$

**Remarque**
À l'aide de ces trois opérations de base, on peut construire de nouvelles opérations. On peut notamment citer l'opération suivante :

*4)* multiplier une ligne $L_i$ par $\alpha \neq 0$ et lui ajouter $\beta$ fois une autre ligne $L_j$ :

$$\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j}$$

qui admet la généralisation suivante :

*4')* multiplier une ligne $L_i$ par $\alpha \neq 0$ et lui ajouter une combinaison linéaire d'autres lignes :

$$\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i + \lambda_1 L_{j_1} + \cdots + \lambda_r L_{j_r}}$$

L'intérêt de ces opérations élémentaires réside dans le théorème suivant.

**Théorème 3.**
*Soit $(S)$ un système linéaire.*
*Soit $(S')$ un système linéaire obtenu par applications successives d'opérations élémentaires sur les lignes de $(S)$.*
*Alors $(S)$ et $(S')$ sont équivalents.*

### II.4.b) Illustration de la méthode sur un exemple

Effectuer une opération élémentaire sur un système $(S)$ ne change pas son ensemble des solutions. L'algorithme du pivot de Gauss exploite ce constat. Il se déroule en trois étapes.

***A.*** Par une succession d'opérations élémentaires, on transforme le système $(S)$ en un système échelonné qui admet les mêmes solutions.

***B.*** Si besoin (si le système obtenu en ***A.*** n'est pas triangulaire), on transfère les inconnues auxiliaires dans le membre droit du sytème.
Le système obtenu est triangulaire.

***C.*** On résout par cascade le système triangulaire précédent.
Ses solutions sont celles du système initial $(S)$.

Illustrons ce procédé par la résolution du système linéaire suivant.

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2\,x & + & 5\,y & - & 3\,z & + & 4\,w & = & 5 \\ 5\,x & + & 12\,y & - & 7\,z & + & 20\,w & = & 12 \\ x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \end{array} \right.$$

***A.* Mise sous forme échelonnée de $(S)$.**

***1)*** On considère tout d'abord la première colonne.
Le but est de ne conserver qu'une occurrence de $x$ dans cette colonne.

- Pour ce faire, on commence par échanger la $1^{\text{ère}}$ et $3^{\text{ème}}$ ligne.

$$(S) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ 5\,x & + & 12\,y & - & 7\,z & + & 20\,w & = & 12 \\ 2\,x & + & 5\,y & - & 3\,z & + & 4\,w & = & 5 \end{array}\right.$$

- On ne conserve que l'occurrence de $x$ en $1^{\text{ère}}$ ligne en ajoutant / retirant suffisamment de fois la $1^{\text{ère}}$ ligne aux autres.
*(on a fait en sorte que $x$ soit porté par le cœfficient $1$ en ligne $L_1$ ce qui facilite les calculs)*

$$(S) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & 2\,y & + & 3\,z & + & 5\,w & = & 2 \\ & & y & + & z & - & 2\,w & = & 1 \end{array}\right.$$

> On appelle **pivot** de cette $1^{\text{ère}}$ étape le cœfficient placé devant $x$ dans la ligne utilisée. Ici, le pivot est $1$.

***2)*** On met alors de côté la $1^{\text{ère}}$ ligne. On obtient ainsi un sous-système qui ne contient plus aucune occurrence de la variable $x$.

- On commence par échanger la $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ ligne.

$$(S) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & y & + & z & - & 2\,w & = & 1 \\ & & 2\,y & + & 3\,z & + & 5\,w & = & 2 \end{array}\right.$$

*(on conserve la $1^{\text{ère}}$ ligne dans le système pour que le nouveau système soit encore équivalent à $(S)$ mais on ne l'utilise plus)*

- On utilise alors le procédé précédent sur la variable $y$.

$$(S) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & 2 \\ & & y & + & z & - & 2\,w & = & 1 \\ & & & & z & + & 9\,w & = & 0 \end{array}\right.$$

> Le pivot de la $2^{\text{ème}}$ étape est le cœfficient placé devant la variable $y$ de la ligne utilisée. Ici, il s'agit encore de $1$.

***3)*** Si on met de côté les lignes $L_1$ et $L_2$, on obtient un système qui ne contient plus les variables $x$ et $y$. Ce système amputé ne contient plus qu'une seule ligne et le procédé s'arrête alors.

> Le pivot de la $3^{\text{ème}}$ étape (où l'on ne fait rien) est le cœfficient placé devant la variable $z$. Ici, il s'agit encore de $1$.

Le système obtenu à la fin de l'étape ***A.*** :

× possède les mêmes solutions que le système initial $(S)$,
*(d'après le Théorème 3)*

× est échelonné.

***B.* Mise sous forme triangulaire du système obtenu.**

Avant de passer à l'étape suivante, on transfère les inconnues auxiliaires (il s'agit ici de $w$) dans le membre droit.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 2 & - & 3\,w \\ & & y & + & z & = & 1 & + & 2\,w \\ & & & & z & = & & - & 9\,w \end{array}\right.$$

Le système obtenu est triangulaire.

### *C.* Mise sous forme diagonale et résolution du système.

On résout alors le système par cascade (*i.e.* par remontées successives).

*1)* On commence par la $3^{\text{ème}}$ colonne et la variable $z$.
Le but est de ne conserver qu'une occurrence de $z$ dans cette colonne.

- Pour ce faire, on ajoute / retranche suffisamment de fois la $3^{\text{ème}}$ ligne aux autres.

$$(S) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & & & = & 2 & - & 21\,w \\ & & y & & & = & 1 & + & 11\,w \\ & & & & z & = & & - & 9\,w \end{array} \right.$$

*2)* On agit alors de même pour la $2^{\text{ème}}$ colonne et $y$ : on ajoute / retranche suffisamment de fois la $2^{\text{ème}}$ ligne aux autres.

$$(S) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & = & & - & 43\,w \\ & & y & & & = & 1 & + & 11\,w \\ & & & & z & = & & - & 9\,w \end{array} \right.$$

*3)* Le système obtenu est diagonal.
L'algortihme du pivot de Gauss est alors terminé.

L'ensemble des solutions de $(S)$ est $\{(-43\,w, 1+11\,w, -9\,w, w) \mid w \in \mathbb{R}\}$.

**Théorème 4.**

*Soit $(S)$ un système linéaire.*

*Par application de la méthode du pivot de Gauss, on transforme $(S)$ en un système diagonal (tous les cœfficients non diagonaux sont nuls) équivalent.*

**Théorème 5.**

*Soit $(S)$ un système à $n$ équations et $n$ inconnues.*

| | | |
|---|---|---|
| *$(S)$ est un système de Cramer* | $\iff$ | *L'algorithme du pivot de Gauss fait apparaître $n$ pivots successifs non nuls* |

*Démonstration.*
C'est n'est qu'une reformulation du Théorème 1. ☐

### II.4.c) L'algorithme du pivot de Gauss (`POLY`)

#### *A.* Mise sous forme triangulaire de $(S)$.

`Pivot_Gauss_A(`$S$`)` :

1) Deux cas se présentent.
   - Soit la première colonne de $(S)$ ne contient que des cœfficients nuls. Dans ce cas, on passe directement à l'étape ***A3***.
   - Sinon, on note $x$ l'inconnue la plus à gauche de $(S)$.
     On choisit alors la première ligne $L$ dont le cœfficient $a$ devant $x$ est non nul. Quitte à effectuer une permutation ($L \leftrightarrow L_1$), on place cette ligne en première position.
     *(le cœfficient $a$ est appelé* **pivot de Gauss** *de cette étape)*
2) On annule alors les cœfficients devant $x$ pour les autres lignes.
   Pour ce faire, on retire à $L_i$ suffisamment de fois la ligne $L_1$ :
   $$L_i \leftarrow L_i + \alpha_i\ L_1 \quad (\text{pour tout } i \geqslant 2)$$
3) $L_1$ et $C_1$ (colonne 1) omis, on a ainsi créé un sous-système $(S')$ possédant une ligne et une variable (une colonne) de moins.
4) - Si $(S')$ ne contient plus aucune équation, on s'arrête.
   - Sinon, on recommence les différentes étapes de cet algorithme sur ce nouveau système $(S')$ en réalisant l'appel : `Pivot_Gauss_A(`$S'$`)`.

À l'issue de cette étape ***A.*** on transfère, si besoin, les inconnues auxiliaires dans le membre de droite.
Le système obtenu est sous la forme triangulaire suivante.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcccrcccrcrcrcccr} a_{1,1}\ x_1 & + & a_{1,2}\ x_2 & + & \dots & + & a_{1,i}\ x_i & + & \dots & + & a_{1,n}\ x_n & = & b_1 & - & a_{1,n+1}\ x_{n+1} & - & \dots & - & a_{1,p}\ x_p \\ & & a_{2,2}\ x_2 & + & \dots & + & a_{2,i}\ x_i & + & \dots & + & a_{2,n}\ x_n & = & b_2 & - & a_{2,n+1}\ x_{n+1} & - & \dots & - & a_{2,p}\ x_p \\ & & & & & & a_{i,i}\ x_i & + & \dots & + & a_{i,n}\ x_n & = & b_i & - & a_{i,n+1}\ x_{n+1} & - & \dots & - & a_{i,p}\ x_p \\ & & & & & & & & & & a_{n,n}\ x_n & = & b_n & - & a_{n,n+1}\ x_{n+1} & - & \dots & - & a_{n,p}\ x_p \end{array} \right.$$

On passe alors à l'étape de résolution.

***B.*** **Résolution par remontées successives.**

`Pivot_Gauss_B(`$S$`)` :

1) Deux cas se présentent.
   - Soit la dernière colonne de $(S)$ ne contient que des cœfficients nuls.
     Dans ce cas, on passe directement à l'étape ***B3***.
   - Sinon, on fixe la dernière ligne $L_d$ du système.
     Notons $z$ la variable présente dans cette ligne.
2) On annule alors les cœfficients devant $z$ pour les autres lignes.
   Pour ce faire, on retire à $L_i$ suffisamment de fois la ligne $L_d$ :

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha_i\ L \quad (\text{pour tout } i \leqslant d)$$

3) $L_d$ et $C_d$ (colonne $d$) omis, on a ainsi créé un sous-système $(S')$ possédant une ligne et une variable (une colonne) de moins.
4) 
   - Si $(S')$ ne contient plus aucune équation, on s'arrête.
   - Sinon, on recommence les différentes étapes de cet algorithme sur ce nouveau système $(S')$ en réalisant l'appel : `Pivot_Gauss_B(`$S'$`)`.

À l'issue de cette étape, tous les cœfficients non diagonaux sont nuls.
On en déduit les solutions du système initial.

**Remarque**

- Pour programmer cet algorithme en **Scilab**, on programme tout d'abord la fonction `Pivot_Gauss_A` puis la fonction `Pivot_Gauss_B`. Ces deux fonctions prennent en paramètre un système linéaire et renvoie un système linéaire équivalent. La fonction finale s'écrit alors :

```
// Algorithme du pivot de Gauss
function D = pivot_Gauss(S)
  T = pivot_Gauss_A(S)
  D = pivot_Gauss_B(T)
endfunction
```

**Remarque** *(un peu de culture informatique)*

- Dans l'étape ***4)*** de l'algorithme `Pivot_Gauss_A`, on réalise un appel à l'algorithme `Pivot_Gauss_A`. On est donc en train de définir `Pivot_Gauss_A` en fonction de lui-même ! On dit alors que l'on effectue une définition **récursive** de la fonction `Pivot_Gauss_A`.
- La terminaison de cet algorithme est assuré par le fait que les différents appels se font sur des systèmes possédant de moins en moins (strictement) d'équations. On aboutit donc forcément toujours à un sous-système qui ne possède plus d'équations, ce qui correspond au cas d'arrêt de l'algorithme.
- On aurait aussi pu choisir une autre présentation. En effet, comme on effectue successivement un travail sur chacune des colonnes du système linéaire, une boucle for est tout à fait envisageable pour cet algorithme.