CH XIII : Calcul matriciel

I. Généralités sur les matrices

Définition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à cœfficients dans $\mathbb{R}$ un tableau de nombres réels.

Si A est une matrice, on note $a_{i,j}$ le cœfficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. La matrice A s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- On notera aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
- On dira aussi que A est de **taille** (ou dimension) $n \times p$.
- L'ensemble des matrices réelles de taille $n \times p$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Si $n = p$, on dira que la matrice A est une matrice **carrée**.
  On notera $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$.
  On parlera de matrice **rectangle** si $n \neq p$.
- Un élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice ligne** ou **vecteur ligne**. Par exemple, la $i^{\text{ème}}$ ligne de A est un vecteur ligne. Il s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix}$$

- Un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice colonne** ou **vecteur colonne**. Par exemple, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est un vecteur colonne. Il s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

- La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les cœfficients sont nuls est appelée **matrice nulle**. Elle est notée $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ ou tout simplement 0.

> Même si la matrice nulle est notée 0, il ne faut pas la confondre avec le réel 0.

- Si $n = p$, on appelle **matrice identité** et on note I_n la matrice carrée dont tous les cœfficients sont nuls à l'exception des termes diagonaux qui sont égaux à 1. Plus précisément :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Égalité de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

A et B sont **égales** si :

a) elles ont le même nombre de lignes : $n = m$.

b) elles ont le même nombre de colonnes : $p = q$.

c) elles ont les mêmes cœfficients : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}$.

II. Opérations matricielles

II.1. Somme de matrices

Définition
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle **somme** de A et B et on note $A+B$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{A+B \ = \ (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}}$$

L'opérateur de somme matricielle $+$ est **interne** (dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) :

$$+ \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\ A\ ,\ B\ ) & \mapsto & A+B \end{array} \right.$$

(partant de deux éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la somme associe un élément qui est lui aussi dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ e^2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 1 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -5 \\ e^2+1 & -1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La somme de deux matrices correspond à la somme terme à terme des cœfficients des deux matrices. L'opérateur matriciel « + » peut-être vu comme une extension de l'opérateur arithmétique « + ».

Même si la notation est la même, attention à ne pas confondre ces deux opérateurs de somme. On ne peut sommer deux matrices que si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

$$\cancel{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ e^2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}} \qquad \cancel{32 + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ e^2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Remarque

- **Scilab** est un logiciel de calcul numérique. Il est notamment pensé pour pouvoir résoudre efficacement des problèmes d'analyse numérique, qui exigent d'effectuer un grand nombre de calculs de manière itérative. Il est donc naturel que le type de base soit le type `constant` qui regroupe l'ensemble des matrices de réels.
- **Scilab** gère évidemment les opérations mathématiques de base sur les matrices mais propose aussi des opérations permettant de simplifier la manipulation de matrices. Il faut donc faire attention : certaines opérations autorisées en **Scilab** sont formellement interdites dans le cours de mathématiques !
- Par exemple, **Scilab** permet de sommer un réel r et une matrice A. Le résultat est la matrice obtenue en ajoutant r à tous les cœfficients de A.

```
--> A = [1,2,-2; 2,5,-3]; 5+A
    ans  =
          6.    7.     3.
          7.    10.    2.
```

Propriété
Soient A, B, C des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

- $\boxed{A+B = B+A}$
  (l'opérateur + est commutatif)
- $\boxed{A+(B+C) = (A+B)+C}$
  (l'opérateur + est associatif)
- $\boxed{A+0 = 0+A = A}$
  (0 est l'élément neutre pour l'opérateur +)
- Notons $-A = (-a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Alors : $\boxed{A+(-A) = (-A)+A = 0}$
  (la matrice $-A$ est l'opposée de la matrice A pour l'opérateur +)

II.2. Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle **produit de** A **par le réel** λ la matrice $\lambda \cdot A$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\lambda \cdot A = (\lambda\ a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}}$$

L'opérateur de produit d'une matrice par un nombre réel $\cdot$ est **externe** :

$$\cdot \ : \left| \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \times & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\ \lambda & , & A\ ) & \mapsto & \lambda \cdot A \end{array} \right.$$

(les deux opérandes de l'opérateur $\cdot$ n'appartiennent pas au même ensemble)

Exemple

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ e^2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & -49 \\ 7\,e^2 & 21 & -7 \end{pmatrix}$$

Effectuer le produit d'une matrice par un réel correspond à effectuer, pour chaque cœfficient, le produit (classique) par λ.

Propriété

Soit A et B des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\boxed{\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A}$
  (pseudo associativité : quels sont les opérateurs en jeu ?)
- $\boxed{1 \cdot A = A}$
  (pseudo élément neutre)
- $\boxed{\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B}$ $\boxed{(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot B}$
  (pseudo distributivité : quels sont les opérateurs en jeu ?)
- $\boxed{-1 \cdot A = -A}$

Remarque

- Par la suite, on omettra souvent l'opérateur « $\cdot$ ».
  On notera alors λA au lieu de $\lambda \cdot A$.
- En **Scilab**, cet opérateur se note $\star$.

```
--> B = [-1,0,1,4; 2,0,0,5; 8,-4,3,7]; 5 * B
 ans  =
    - 5.     0.     0.     20.
      10.    0.     0.     25.
      40.  - 20.    15.    35.
```

II.3. Produit de matrices

II.3.a) Définition

Définition

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On appelle **produit de** A **et** B et on note $A \times B$ la matrice C ayant les propriétés suivantes :

1) $C = A \times B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$

2) $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, q]\!]$, $\boxed{c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{i,k}\ b_{k,j}}$

Représentation graphique du produit matriciel

Le cœfficient $c_{i,j}$ de la matrice produit est obtenu en effectuant le produit matriciel de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -13 & 8 & -5 & 0 \\ -16 & 12 & -7 & 12 \end{pmatrix} = C$$

Il faut faire particulièrement attention aux tailles des matrices que l'on souhaite multiplier.

Plus précisément, on peut résumer cette situation dans un tableau.

Taille de A	Taille de B	Taille de $A \times B$
$n \times p$	$p \times q$	$n \times q$
1×2	2×7	1×7
3×2	2×1	3×1
3×5	5×3	3×3
2×3	2×3	**NON !**
4×4	4×4	4×4

On peut remarquer (on reviendra dessus plus tard) qu'il est toujours possible de multiplier des matrices carrées de même taille :

$$A \text{ et } B \text{ dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad A \times B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B \times A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque

- Le produit de matrices est noté $\star$ en **Scilab**. Si les tailles des matrices ne permettent pas leur multiplication, une erreur est levée.

```
--> A * B
    ans  =
       - 13.    8.   - 5.    0.
       - 16.    12.  - 7.    12.

--> B * A
  !--error 10
Multiplication incohérente.
```

- En **Scilab**, si l'on dispose de deux matrices de même taille, on peut aussi effectuer le produit coefficient par coefficient.

```
--> A .* A
    ans  =
         6.    7.     3.
         7.    10.    2.
```

Attention, cette opération est interdite dans le cours de mathématiques !

II.3.b) Propriétés

Propriété

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.

Soient $D \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $E \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

1) $\boxed{A \times (B \times C) = (A \times B) \times C}$

(pseudo associativité : combien d'opérateurs en jeu ?)

2) $\boxed{(A + D) \times B = A \times B + D \times B}$

(pseudo distributivité à droite : combien d'opérateurs en jeu ?)

3) $\boxed{A \times (B + E) = A \times B + A \times E}$

(pseudo distributivité à gauche : combien d'opérateurs en jeu ?)

4) $\boxed{A \times I_p = I_n \times A = A}$

(pseudo élément neutre)

5) $\boxed{A \times (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B)}$

Propriété non vérifiées par $\times$

- En général, $\boxed{A \times B \not= B \times A}$

  Prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

  En effet, on a : $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- En général, $\boxed{(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) \not= A^2 + 2 \cdot A \times B + B^2}$

  On peut prendre les deux matrices précédentes.

  En effet, on a : $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^2 + 2 \cdot A \times B + B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- En général, $\boxed{A \times B = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0}$

  Prendre $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- En général, $\boxed{A \times B = A \times C \not\Rightarrow B = C}$

  Prendre $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

II.3.c) Le cas particulier des matrices carrées

(i) L'opérateur $\times$ est interne (dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

Lorsque l'on considère des matrices carrées ($n = p$), l'ensemble des propriétés énoncées précédemment reste évidemment valable. On peut de plus citer une particularité liée à ce cas. En effet, l'opérateur $\times$ est alors **interne** (dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) :

$$\boxed{\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A \times B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

(partant de deux éléments dans A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \times B$ reste dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)
Grâce à cette particularité, les pseudo-caractéristiques énoncées dans les propriétés précédentes deviennent des caractéristiques.

Propriété

Soient A, B, C, D, E des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors :

1) $\boxed{A \times (B \times C) = (A \times B) \times C}$
(l'opérateur $\times$ est associatif)

2) $\boxed{(A + D) \times B = A \times B + D \times B}$
(l'opérateur $\times$ est distributif à droite par rapport à l'opérateur $+$)

3) $\boxed{A \times (B + E) = A \times B + A \times E}$
(l'opérateur $\times$ est distributif à gauche par rapport à l'opérateur $+$)

4) $\boxed{A \times I_n = I_n \times A = A}$
(I_n est l'élément neutre pour l'opérateur $\times$)

5) $\boxed{A \times (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B)}$

(ii) Matrices triangulaires et produit

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On dit que la matrice A est :

- **triangulaire supérieure** si $\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2,\ (i > j \ \Rightarrow\ a_{i,j} = 0)}$
- **triangulaire inférieure** si $\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2,\ (i < j \ \Rightarrow\ a_{i,j} = 0)}$
- **diagonale** si $\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j \ \Rightarrow\ a_{i,j} = 0)}$

Ainsi, ces matrices pourront se présenter de la manière suivante :

$$\underset{\text{Triangulaires supérieures}}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Triangulaires inférieures}}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \lambda_n \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Diagonales}}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

où $*$ est utilisé pour représenter des cœfficients quelconques - pas forcément le même ! - (éventuellement nul) et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ est utilisé pour représenter un cœfficient diagonal (éventuellement nul).

Remarque

- Les matrices diagonales sont à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure (inversement, si une matrice est triangulaire supérieure et inférieure alors elle est diagonale).
- La matrice nulle 0 est diagonale.
- Les matrices I_n et λI_n sont diagonales.

Exemple

- Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont triangulaires supérieures.
- Les matrices $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ sont triangulaires inférieures.
- Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont diagonales / triangulaires supérieures / triangulaires inférieures.
- Les matrices $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont ni diagonale, ni triangulaire supérieure, ni triangulaire inférieure.

Théorème 1.

- *Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaires supérieures (resp. inférieures).*
- *Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.*

Démonstration.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & * & \dots & * \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\beta_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \lambda_n\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\beta_n \end{pmatrix}$$

$\square$

(iii) Puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice carrée

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et soit $m \in \mathbb{N}$.

- La puissance $m^{\text{ème}}$ de A, est la matrice : $A^m = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{m \text{ fois}}$.
- De manière rigoureuse, les puissances de A sont définies par la relation de récurrence :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} A^0 = I_n \\ \forall m \in \mathbb{N},\ \ A^{m+1} = A \times A^m \end{array} \right.}$$

Remarque

- Par convention : $(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})})^0 \ = \ I_n$.
- Si $m \neq 0$, $0^m = 0$ et $(I_n)^m = I_n$ et $(\lambda I_n)^m = \lambda^m I_n$
- De par les propriétés précédentes sur les matrices triangulaires, on a :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ * & \lambda_2^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

> Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le produit $\times$ n'étant pas commutatif, il faut faire attention à l'élévation à la puissance m :
>
> $$(A \times B)^m \ = \ (A \times B) \times \cdots \times (A \times B) \neq A^m \times B^m$$

Théorème 2.

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $m \in \mathbb{N}$.

Supposons de plus que A et B commutent : $AB = BA$.

Alors :

$$\boxed{(A+B)^m \ = \ \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k}}$$

Démonstration.
La démonstration est la même que pour la formule du binôme de Newton arithmétique. Il suffit de procéder par récurrence. □

Remarque

Par la suite, on omettra souvent l'opérateur « $\times$ ». On notera alors AB au lieu de $A \times B$.

II.4. Transposée d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- On appelle **transposée de** A, et on note ${}^tA$, la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\boxed{{}^tA \ = \ (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}}$$

- L'opération de transposition consiste à échanger les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple

$${}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad {}^t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soient $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

1) $\boxed{{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB}$ *2)* $\boxed{{}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA}$

(linéarité de l'application de transposition)

3) $\boxed{{}^t({}^tA) = A}$

(idempotence de l'application de transposition)

4) $\boxed{{}^t(C \times D) = {}^tD \times {}^tC}$

Démonstration.

4) Notons $a'_{i,j}$ (resp. $b'_{i,j}$) le cœfficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA$ (resp. ${}^tB$). Autrement dit : $a'_{i,j} = a_{j,i}$ et $b'_{i,j} = b_{j,i}$.
Notons maintenant $C = A \times B$ et $C' = {}^tB \times {}^tA$. On a alors :
$c'_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} b'_{i,k}\ a'_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{k,i}\ a_{j,k} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{j,k}\ b_{k,i} = c_{j,i}$ et donc $C' = {}^tC$. □

Proposition 1.

L'application $\ {}^t\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$ *est bijective.*

Démonstration.
Caractère surjectif : toute matrice $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ apparaît comme l'image par la fonction transposée d'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
En effet, $M = {}^t({}^tM)$ et ${}^tM \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Caractère injectif : soient M et P dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = {}^tP$. Si on note $m'_{i,j}$ les cœfficients de ${}^tM$ (et $p'_{i,j}$ ceux de ${}^tP$) alors on a :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \begin{array}{ccc} m'_{i,j} & = & p'_{i,j} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ m_{j,i} & & p_{j,i} \end{array}$$

ce qui revient à dire que $M = P$. □

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dira que la matrice A est **symétrique** si elle coïncide avec sa transposée, *i.e.* si ${}^tA = A$.
- Autrement dit :

$$\boxed{A \text{ est symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,j} = a_{j,i}}$$

Remarque

- Les seules matrices à la fois triangulaires supérieures (resp. inférieures) et symétriques sont les matrices diagonales.
- Seules les matrices carrées peuvent être symétriques.

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, sa transposée ${}^tA$ est dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Ainsi, l'égalité $A = {}^tA$ n'est possible que si $n = p$. Autrement dit, les seules matrices pouvant être symétriques sont les matrices carrées.

Exemple

- Les matrices suivantes sont symétriques.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique.

III. Les matrices inversibles

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- A est dite **inversible** si elle admet un inverse *i.e.* s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\boxed{A \times B = B \times A = I_n}$
- Si elle existe, la matrice B ainsi définie est unique. Elle est appelée **inverse de** A et est notée A^{-1}.
- On notera $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Seules les matrices carrées peuvent être inversibles.

Remarque

Même si le lien entre applications et matrices n'est pas l'objet de ce cours, il y a tout lieu de remarquer l'analogie entre la définition de l'inverse d'une matrice et celle de réciproque d'une application.

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & \times & B & = & I_n & \qquad & B & \times & A & = & I_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \text{et} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ f & \circ & g & = & \mathrm{id}_{\mathrm{F}} & & g & \circ & f & = & \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \end{array}$$

Exemple

- La matrice identité est inversible d'inverse elle-même : $I_n \times I_n = I_n$.
- Les matrices diagonales dont les cœfficients diagonaux sont tous non nuls sont inversibles. En effet :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et le produit commuté est aussi égal à la matrice identité.
- Les matrices triangulaires (supérieures et inférieures) à cœfficients diagonaux tous non nuls sont inversibles (voir plus loin).

Théorème 3.

Soient A, B et P des matrices **inversibles** *de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1) *A^{-1} est inversible. De plus :* $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$

2) *${}^tA$ est inversible. De plus :* $\boxed{({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})}$

3) *$A \times B$ est inversible. De plus :* $\boxed{(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}}$

4) *Soit $m \in \mathbb{N}$. A^m est inversible. De plus :* $\boxed{(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m}$

5) *$P^{-1}AP$ est inversible. De plus :* $\boxed{(P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P}$

Démonstration.

1) Par définition, $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

2) ${}^t(A \times A^{-1}) = {}^t(A^{-1}) \times {}^tA = {}^tI_n = I_n$
et ${}^t(A^{-1} \times A) = {}^tA \times {}^t(A^{-1}) = {}^tI_n = I_n$.

3) $(A \times B) \times (B^{-1} \times A^{-1}) = (B^{-1} \times A^{-1}) \times (A \times B) = I_n$.

4) $A \times \ldots \times A \times A^{-1} \times \ldots A^{-1} = A^{-1} \times \ldots A^{-1} \times A \times \ldots \times A = I_n$. □

Propriété de simplification

Soient A, B, C dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Si $A \times C = B \times C$ et C inversible, alors $A = B$.

2) Si $C \times A = C \times B$ et C inversible, alors $A = B$.

3) Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $A \times B = 0$ alors A et B ne sont pas inversibles.

4) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec A inversible.
L'équation $AX = B$ admet alors une unique solution $X = A^{-1} \times B$.

Démonstration.

Il suffit de multiplier de part et d'autres de l'égalité par la matrice inverse. □

Théorème 4.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons que : $A \times B = I_n$.

Alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Démonstration.
Admis en première année. □

Remarque

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On utilise parfois le vocabulaire suivant.
  - × A admet une **inverse à gauche** si : $\exists B_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ B_1\ A = I_n$.
  - × A admet une **inverse à droite** si : $\exists B_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A\ B_2 = I_n$.
- Par définition, une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est à la fois inverse à gauche de A et inverse à droite de A.
- Le Théorème 4 signifie que si B est l'inverse à gauche de A, alors B est l'inverse de A.

Théorème 5.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $m \in \mathbb{N}$.

Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

1) $\boxed{(P^{-1} \times A \times P)^m \ = \ P^{-1} \times A^m \times P}$

2) $\boxed{(P \times A \times P^{-1})^m \ = \ P \times A^m \times P^{-1}}$

Démonstration.
On démontre par récurrence que les propriétés ***1)*** et ***2)*** sont vérifiées pour tout $m \in \mathbb{N}$. L'idée derrière l'étape d'hérédité est que :

$$\begin{array}{rcl}
(P^{-1} \times A \times P)^{m+1} & = & (P^{-1} \times A \times P) \times (P^{-1} \times A \times P)^m \\
& = & (P^{-1} \times A \times P) \times (P^{-1} \times A^m \times P) \\
& = & P^{-1} \times A \times (P \times P^{-1}) \times A^m \times P \\
& = & P^{-1} \times A \times A^m \times P \ = \ P^{-1} \times A^{m+1} \times P
\end{array}$$
□

IV. Lien entre système linéaire et matrices

IV.1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}\ x_1 & + & a_{1,2}\ x_2 & + & \ldots & + & a_{1,p}\ x_p & = & b_1 & & L_1 \\
a_{2,1}\ x_1 & + & a_{2,2}\ x_2 & + & \ldots & + & a_{2,p}\ x_p & = & b_2 & & L_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{n,1}\ x_1 & + & a_{n,2}\ x_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}\ x_p & = & b_n & & L_n
\end{array} \right.$$

- On appelle **matrice associée** au système linéaire (S), la matrice :

$$A_S = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

- Le système linéaire (S) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\boxed{A_S \times X = B}$$

  - × $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est l'inconnue.
  - × $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est le second membre.
- Résoudre (S) c'est résoudre cette équation d'inconnue X.

Remarque

- Si $n = p$, la matrice A_S associée au système (S) est une matrice carrée.
- Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système se traduisent sur la matrice associée au système.

IV.2. Inverse d'une matrice par résolution de système

IV.2.a) Caractérisation des systèmes de Cramer

Théorème 6.

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.

Notons B le second membre de (S).

(S) est un système de Cramer	$\Leftrightarrow$	*(S) admet une unique solution quelque soit son second membre*

Démonstration.
($\Leftarrow$) Évident.

($\Rightarrow$) Supposons que (S) est un système de Cramer. D'après la caractérisation des systèmes de Cramer, l'algorithme du pivot de Gauss appliqué à (S) fait apparaître n pivots successifs non nuls. Cette procédure étant indépendante du second membre B, on en déduit qu'elle ferait apparaître aussi n pivots non nuls si on l'appliquait à (S) muni d'un autre second membre. □

Théorème 7.

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.

Soit (S_H) le système homogène associé à (S).

(S) est un système de Cramer	$\Leftrightarrow$	*(S_H) est un système de Cramer*

Démonstration.
On a la chaîne d'équivalences suivante :

(S_H) est un système de Cramer
$\Leftrightarrow$ (S_H) admet une unique solution quelque soit son second membre
$\Leftrightarrow$ (S) admet une unique solution quelque soit son second membre
$\Leftrightarrow$ (S) est un système de Cramer □

Remarque
Ces théorèmes signifient que le caractère unique de la solution d'un système carré (S) est indépendant de son second membre. Autrement dit, c'est une caractéristique intrinsèque à son premier membre : la matrice A_S.

Théorème 8.

Soit (S) un système linéaire à n équations et n inconnues.

Soit A_S la matrice associée à (S) ($A_S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

(S) est un système de Cramer	$\Leftrightarrow$	*A_S est une matrice inversible*

Démonstration.
($\Leftarrow$) Supposons A_S inversible. Résoudre le système (S) c'est trouver les solutions de l'équation $A_S \times X = B$ où B est le second membre de (S). Comme A_S est inversible, cette équation admet une unique solution $X = (A_S)^{-1} \times B$.

($\Rightarrow$) Supposons maintenant que (S) est de Cramer. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ notons $B_i \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les cœfficients sont nuls excepté le $i^{\text{ème}}$, égal à 1. Comme (S) est de Cramer, le système $A_S \times X = B_i$ admet une unique solution notée U_i. On obtient ainsi n égalités matricielles différentes que l'on peut résumer comme suit.

$$A_S \times (U_1\ U_2\ \dots\ U_n) = (B_1\ B_2\ \dots\ B_n)$$

Autrement dit, on a exhibé une matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_S \times U = I_n$. Ceci permet de conclure que A_S est inversible, d'inverse U. □

Remarque
Dans le cas où (S) est de Cramer, l'unique solution de ce système est l'unique solution de l'équation : $A_S \times X = Y$. Cette solution est donc $X = (A_S)^{-1} \times Y$.

Théorème 9.

Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure).

Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

1)	*Une matrice triangulaire T est inversible*	$\Leftrightarrow$	*Les cœfficients diagonaux de T sont tous non nuls*
2)	*Une matrice diagonale D est inversible*	$\Leftrightarrow$	*Les cœfficients diagonaux de D sont tous non nuls*

Démonstration.

1) La matrice T est inversible si et seulement si le système $T \times X = Y$ est de Cramer. Or le système est de Cramer si et seulement si l'algorithme du pivot de Gauss fait apparaître successivement n pivots non nuls. Dans le cas d'un système déjà sous forme triangulaire, les pivots sont les cœfficients diagonaux.

2) Même démonstration que ci-dessus. $\square$

Il faut bien lire le Théorème 9 : on parle de l'inversibilité d'une matrice **triangulaire**. Une matrice M quelconque dont tous les cœfficients diagonaux sont non nuls n'est pas forcément inversible.

Exemple

- La matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.
- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

IV.2.b) Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Inverse d'une matrice par inversion d'un système

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ et montrons qu'elle est inversible.

D'après le Théorème 8, la matrice A est inversible ssi le système linéaire (S) : $A \times X = Y$ est de Cramer. Inverser A consiste à inverser le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & = & y_2 \\ 4\,x_1 & + & 9\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

Pour inverser (S) (*i.e.* exprimer chaque x_i en fonction des y_i), on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_1 & & & & \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -\,y_1 & + & y_2 & & \\ & - & 7\,x_2 & - & 6\,x_3 & = & -4\,y_1 & & & & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & y_1 & & & & \\ & & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & - & y_2 & & \\ & & & & x_3 & = & 3\,y_1 & - & 7\,y_2 & + & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 4\,x_2 & & & = & -5\,y_1 & + & 14\,y_2 & - & 2\,y_3 \\ & & x_2 & & & = & -2\,y_1 & + & 6\,y_2 & - & y_3 \\ & & & & x_3 & = & 3\,y_1 & - & 7\,y_2 & + & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & & & = & 3\,y_1 & - & 10\,y_2 & + & 2\,y_3 \\ & & x_2 & & & = & -2\,y_1 & + & 6\,y_2 & - & y_3 \\ & & & & x_3 & = & 3\,y_1 & - & 7\,y_2 & + & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff X = U \times Y$$

Comme (S) est de Cramer, la matrice A est inversible.
Ainsi, la solution de (S) s'écrit $A^{-1}Y$. Or la solution de (S) est UY.

D'où : $A^{-1}Y = UY$ et comme ceci est vrai pour tout Y, on a : $\boxed{A^{-1} = U}$

Inverse d'une matrice par opérations sur les lignes de I_n

Cette technique consiste à se détacher de l'écriture des x_i et y_i et d'opérer sur les matrices plutôt que sur les systèmes.

Considérons de nouveau l'exemple précédent.

$$(S) : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Pour inverser (S) (*i.e.* exprimer chaque x_i en fonction des y_i), on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{array}{rcccccc}
(S) & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -5 & 14 & -2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 3 & -10 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & I_3 & X & = & U & Y
\end{array}$$

Lorsque l'on souhaite utiliser cette écriture matricielle, on se débarrasse de l'écriture des vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On effectue les opérations élémentaires sur les lignes des deux matrices (séparées par une barre verticale) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Théorème 10.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

1) *Par une suite d'opérations élémentaires, on peut transformer A en la matrice I_n.*

2) *En effectuant ces opérations élémentaires (dans le même ordre !) sur I_n, on obtient la matrice A^{-1}.*

Démonstration.

- Initialement, on considère le système (S) donné par l'équation $A \times X = Y$. On peut l'écrire :
$$A \times X = I_n \times Y$$
- Par une suite d'opérations élémentaires, on a montré qu'on modifiait ce système en :
$$I_n \times X = U \times Y$$
- En fait, en opérant par opérations élémentaires, on a transformé la matrice A en la matrice I_n. En opérant ces mêmes opérations sur la matrice I_n, on la transforme en la matrice U, qui n'est autre que l'inverse de A.

$\square$

IV.2.c) Inverse d'une matrice carrée de taille 2×2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculons son inverse via la méthode précédente. Notons $D = ad - bc$ et supposons :

× $D = ad - bc \neq 0$

× $a \neq 0$ (dans un premier temps)

Résolvons le système $(S) : A \times X = Y$.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} a\ x_1 & + & b\ x_2 & = & y_1 \\ c\ x_1 & + & d\ x_2 & = & y_2 \end{array} \right.$$

On applique alors l'algorithme du pivot de Gauss.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{l} a\ x_1 + b\ x_2 = y_1 \\ \left(d - \frac{bc}{a}\right) x_2 = \frac{-c}{a}\ y_1 + y_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a\ x_1 = \left(1 - \frac{ab}{ad-bc}.\frac{-c}{a}\right) y_1 + \frac{-ab}{ad-bc}\ y_2 \\ \left(d - \frac{bc}{a}\right) x_2 = \frac{-c}{a}\ y_1 + y_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a\ x_1 = \frac{ad}{D}\ y_1 - \frac{ab}{D}\ y_2 \\ \frac{D}{a}\ x_2 = \frac{-c}{a}\ y_1 + y_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{d}{D}\ y_1 - \frac{b}{D}\ y_2 \\ x_2 = \frac{-c}{D}\ y_1 + \frac{a}{D} y_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff X = U \times Y$$

Ainsi, la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = U$.

Dans le cas où $a = 0$, on opère de même et on trouve $A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) *Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible.*

2) *Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A inversible, d'inverse :*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Comment retenir cette formule :

- on échange les éléments diagonaux,
- on multiplie les autres par -1,
- et on n'oublie pas de diviser par $ad - bc$ (obtenu par « produit en croix »).

Remarque

La quantité $D = ad - bc$ est appelé **déterminant de** A. On la note habituellement det(A) ou $|A|$. Cette notion de déterminant est aussi définie pour des matrices $n \times n$ (mais nous ne le ferons pas cette année).

De manière générale :

$$\boxed{A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0}$$