I. Inversion : présentation par systèmes linéaires

On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -11 & -4 \\ -3 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

On va montrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse en utilisant la présentation « opérations élémentaires sur systèmes linéaires ».

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrrrr} -1 & x_1 & + & 4 & x_2 & - & 2 & x_3 & = & y_1 & & \\ 2 & x_1 & - & 11 & x_2 & - & 4 & x_3 & = & & y_2 & \\ -3 & x_1 & + & 18 & x_2 & + & 11 & x_3 & = & & & y_3 \end{array} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrrrrr} - & x_1 & + & 4 & x_2 & - & 2 & x_3 & = & y_1 & & & \\ & & - & 3 & x_2 & - & 8 & x_3 & = & 2\,y_1 & + & y_2 & \\ & & + & 6 & x_2 & + & 17 & x_3 & = & -3\,y_1 & & + & y_3 \end{array} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \right.$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & = & y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & = & y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & = & y_1 \quad y_2 \quad y_3 \end{array} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 8L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & = & y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & = & y_1 \quad y_2 \quad y_3 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & = & y_1 \quad y_2 \quad y_3 \end{array} \right.$$

II. Inversion : présentation par calcul matriciel

On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -11 & -4 \\ -3 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

On va montrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse en utilisant la présentation « opérations élémentaires sur matrices ».

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -11 & -4 \\ -3 & 18 & 11 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \right.$

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 8L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ L_1 \leftarrow 3L_1 + 4L_2 \right.$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & = & & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & = & & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & = & & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{3} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & = & & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & = & & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & = & & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \right.$$

On en conclut que la matrice A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{3} \left(\quad \right)$$

Mesure de vérification Inverser une matrice demande toute une série de calculs. Ces calculs sont souvent peu compliqués mais leur nombre fait que les erreurs sont fréquentes. Une fois l'inverse obtenu par calcul, il convient donc de vérifier ce résultat (au brouillon !).

$A \times A^{-1} \ =$

On réalise alors : $\left\{ L_1 \leftarrow 3L_1 + 4L_2 \right.$

$$\left(\quad \right) \middle| \left(\quad \right)$$

On réalise alors : $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{3} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2 \end{array} \right.$

$$\left(\quad \right) \middle| \left(\quad \right)$$

On en conclut que la matrice A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{3} \left(\quad \right)$$

Mesure de vérification Inverser une matrice demande toute une série de calculs. Ces calculs sont souvent peu compliqués mais leur nombre fait que les erreurs sont fréquentes. Une fois l'inverse obtenu par calcul, il convient donc de vérifier ce résultat (au brouillon !).

$A \times A^{-1} \ =$

II.1. Un autre exemple

On considère la matrice B suivante.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

On va montrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse en utilisant la présentation « opérations élémentaires sur matrices ».

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & y_1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & y_2 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \right.$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & y_1 \\ & & & + & x_3 & = & y_1 + y_2 \\ & - & x_2 & & & = & -2y_1 + y_3 \end{array} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \right.$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & y_1 \\ & - & x_2 & & & = & -2y_1 + y_3 \\ & & & + & x_3 & = & y_1 + y_2 \end{array} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \right.$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & & & = & 2y_1 + y_2 \\ & - & x_2 & & & = & -2y_1 + y_3 \\ & & & + & x_3 & = & y_1 + y_2 \end{array} \right.$$

II.2. Un autre exemple

On considère la matrice B suivante.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

On va montrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse en utilisant la présentation « opérations élémentaires sur matrices ».

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \right.$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \right.$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \right.$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\{$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} - & x_1 & & & & & & 4 & y_1 & + & y_2 & - & y_3 \\ & & - & x_2 & & & = & -2 & y_1 & & & + & y_3 \\ & & & & + & x_3 & = & & y_1 & + & y_2 & & \end{array}\right.$$

On réalise alors : $\left\{ \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}} \right.$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} & x_1 & & & & & = & -4 & y_1 & - & y_2 & + & y_3 \\ & & + & x_2 & & & = & 2 & y_1 & & & - & y_3 \\ & & & & + & x_3 & = & & y_1 & + & y_2 & & \end{array}\right.$$

On en conclut que la matrice B est inversible, d'inverse :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mesure de vérification (au brouillon !)

$$B \times B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On réalise alors : $\{$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On réalise alors : $\left\{ \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}} \right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On en conclut que la matrice B est inversible, d'inverse :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mesure de vérification (au brouillon !)

$$B \times B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$