

Feuille d'exercices n°13 : Calcul matriciel

Manipulations de base sur les matrices

Exercice 1. (☆)

Parmi ces matrices, lesquelles sont triangulaires supérieures? Inférieures? Diagonales? Inversibles?

$$\begin{array}{llll} a) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & c) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & e) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} & g) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ b) \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} & d) \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} & f) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & h) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 2. (☆)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A + B$, $2A - B$, AB , BA , ${}^t(AB)$ et ${}^tB{}^tA$.
- Calculer $3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$.
- Résoudre l'équation $A - 3X = 2B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (☆)

Calculer LC et CL , où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. (☆)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Développer et simplifier $S = (2A)(3B) - (A + 2B)^2 + (A - B)(A + B)$.
- Même question pour $T = (A + B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A + B) + (-A + B)^2$.

Produit de matrices via la formule du cours (définition)

Exercice 5. (★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $S(A)$ la somme des termes de A .

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $J = (1)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Vérifier que : $J \times A \times J = S(A) \cdot J$.

Exercice 6. (★★)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient $e_{i,j}$ égal à 1.

a. Calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.

b. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

(on pourra utiliser la notation $\delta_{i,j}$ qui désigne 1 si $i = j$ et 0 sinon)

Équations matricielles

Exercice 7. (★)

Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(i.e. l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que $AM = MA$)

Exercice 8. (★)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 = B$, d'inconnue A .

Exercice 9. (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
- Déterminer toutes les matrices $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Matrices symétriques, transposée**Exercice 10. (☆)**

Soient $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Démontrer que ${}^t(C \times D) = {}^tD \times {}^tC$.

Exercice 11. (★★)

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = -a_{j,i}$$

- Exhiber les matrices à la fois antisymétriques et diagonales.
- Montrer que $A {}^tA$ est symétrique pour toute matrice A .
- Soient A, B deux matrices symétriques.
 - Montrer que : AB est symétrique $\Leftrightarrow AB = BA$
 - Que dire si elles sont antisymétriques ?
 - Si l'une est symétrique et l'autre antisymétrique ?

Trace d'une matrice**Exercice 12. (★★)**

Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})$, de taille $n \times n$, on appelle *trace* de A , et on note $tr(A)$, le nombre $\sum_{k=1}^n a_{kk}$.

- Quelle est la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$? Que valent $tr(I_n)$ et $tr(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$?
- Démontrer que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Démontrer que $tr(AB) = tr(BA)$, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- En déduire que l'équation $AB - BA = I$, d'inconnues $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, n'a pas de solution.

Exercice 13. (★★)

Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $tr(A {}^tA) = 0$.

Inverse d'une matrice A **Exercice 14. (★)**

- Soit A une matrice inversible.
Démontrer que l'inverse de A est définie de manière unique.
- Soient A et B deux matrices carrées inversibles.
Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Soient A et B deux matrices carrées non nulles, vérifiant $AB = 0$.
Montrer que ni A ni B n'est inversible.
- Donner un exemple de matrices carrées A et B non nulles tq : $AB = 0$.

Exercice 15. (★)

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

- B admet une inverse à gauche : $\exists A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_1B = I_n$.
- B admet une inverse à droite : $\exists A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), BA_2 = I_n$.

Montrer que $A_1 = A_2$.

Obtention de l'inverse de A par une relation $AB = I_n$

Exercice 16. (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2I_3 - A$.
 b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17. (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer $A^3 - A$.
 b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 18. (★★)

On considère les matrices suivantes A et B suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer A^2 , A^3 puis montrer que $A^3 - A^2 - A + I = 0$.
 b) En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .
 c) Montrer que $B^3 - 3B^2 + 2B = 0$.
 d) En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 19. (★)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{a}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.
 b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 20. (★)

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB = A + I_n$.

- a) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
 b) En déduire que : $AB = BA$.

Calcul d'inverse par pivot de Gauss

Exercice 21

Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Puissance $m^{\text{ème}}$ par récurrence

Exercice 22. (★)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

- a) Montrer que $B^2 = 3B$.
 b) En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = 2^n I + \frac{5^n - 2^n}{3} B$.

Puissance $m^{\text{ème}}$ par la formule du binôme

Exercice 23. (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Soit $B = A - I_3$. Calculer B^2 , B^3 et en déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 b) Calculer (simplifier!) A^n par la formule du binôme.

Exercice 24. (★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Vérifier que $(A - I)^2 = 0$.
 b) En utilisant le fait que $A = (A - I) + I$, calculer A^n pour $n \geq 2$.

Exercice 25. (★★)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer M^n pour tout entier n .

Exercice 26. (★★)

Soit P une matrice carrée telle que $P^2 = P$.

- a) Montrer que si P est inversible, alors $P = I$.
 Donner un exemple de matrice P qui n'est ni nulle ni égale à I .
 b) Montrer que la matrice $Q = I - P$ vérifie aussi $Q^2 = Q$.
 c) Montrer que $PQ = QP = 0$.
 d) Calculer $(I + P)^n$, pour tout entier naturel n .

Puissance $m^{\text{ème}}$ de matrices et suites définies par récurrence**Exercice 27. (★★)**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
 En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = u_n A + v_n I$.
 On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1} , u_n , v_{n+1} et v_n .

- c) On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$.
 Reconnaitre les suites (α_n) et (β_n) .
 d) En déduire u_n et v_n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 28. (★★)

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 3$ et les relations de récurrences $u_{n+1} = 6u_n - v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 4v_n$.

- a) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
 b) Montrer qu'on peut décomposer A sous la forme $A = 5I + J$, où J est une matrice qui vérifie $J^2 = 0$. En déduire A^n pour tout $n \geq 0$.
 c) Obtenir alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 29. (★★)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Vérifier que $Q = P^{-1}$.
 b) Que vaut $D = QAP$? En déduire D^n .
 c) Montrer que $\forall n \geq 0, A^n = PD^nQ$.
 En déduire les coefficients de A^n .
 d) Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
 Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ et en déduire une expression de u_n suivant n .