

## CH XIV : Calcul différentiel

### I. Dérivabilité en un point

Dans la suite, on notera  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et on notera  $x_0$  un point de  $I$ .

#### I.1. Définitions / taux d'accroissement

##### Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ .

On appelle **taux d'accroissement** de  $f$  en  $x_0$  la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

##### Interprétation physique

Un taux d'accroissement peut être pensé comme une **vitesse moyenne** : la quantité  $f(x) - f(x_0)$  représente un déplacement effectué sur un laps de temps  $x - x_0$ .

- La vitesse moyenne de déplacement d'une voiture entre deux moments  $t_1$  et  $t_2$ , est définie par un taux d'accroissement :

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{km(t_2) - km(t_1)}{t_2 - t_1}$$

où  $km(t)$  désigne le nombre de kilomètres effectués à la date  $t$ .

Sauf à considérer que l'on peut effectuer des kilomètres négatifs (en marche arrière par exemple), cette vitesse moyenne est toujours positive.

- On peut aussi citer le taux d'accroissement d'une population :

$$\text{Accroissement démographique} = \frac{pop(t_2) - pop(t_1)}{t_2 - t_1}$$

où  $pop(t)$  désigne la taille de la population à la date  $t$ .

Notez que l'on peut avoir un taux d'accroissement négatif : cela signifie que la population a diminué.

- On considère le déplacement d'un alpiniste en repérant son altitude. Sa vitesse moyenne de déplacement vertical est alors définie par :

$$\text{Vitesse moyenne verticale} = \frac{alt(t_2) - alt(t_1)}{t_2 - t_1}$$

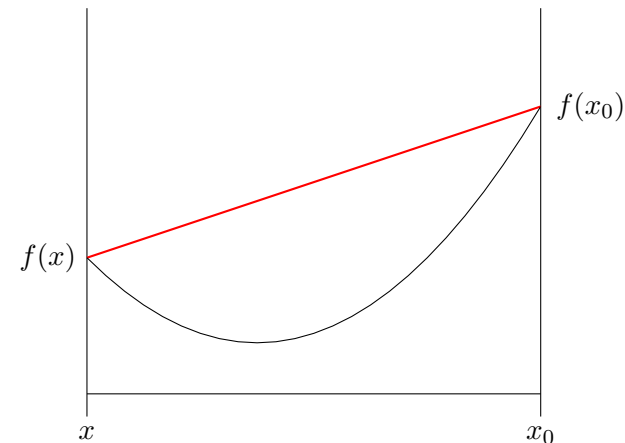
où  $alt(t)$  désigne l'altitude de l'alpiniste à la date  $t$ .

Lorsque cette vitesse moyenne est négative, cela signifie qu'entre les temps  $t_1$  et  $t_2$ , l'alpiniste a globalement descendu.

Au contraire, si elle est positive c'est qu'il a globalement monté.

##### Interprétation graphique

Notons  $M(x, f(x))$  et  $M_0(x_0, f(x_0))$  points de la courbe représentative de  $f$ . Alors  $\tau_{x_0}(f)(x)$  est la pente de la corde  $M_0M$ .



### Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ .

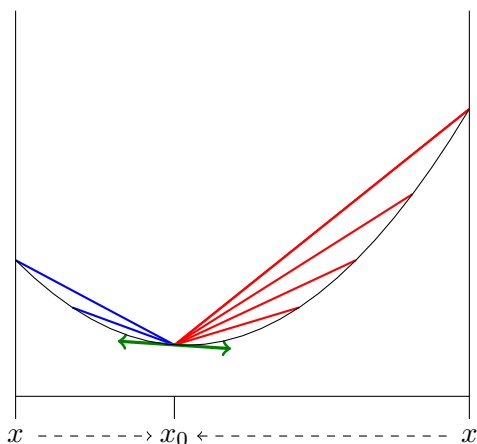
- On dit que  $f$  est **dérivable en**  $x_0$  lorsque la fonction  $\tau_{x_0}(f)$  admet une limite finie en  $x_0$ .
- Lorsque cette limite existe, elle est appelée **nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$**  et est noté  $f'(x_0)$ . Autrement dit :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### Interprétation physique

- Le taux d'accroissement s'interprétant comme une vitesse moyenne, sa limite en un point s'interprète comme une vitesse instantanée.
- Par exemple, si une voiture a effectué 200 km en 2H, c'est qu'elle a roulé en moyenne à 100 km/H. Mais elle a pu effectuer des pointes à 130 km/H.

### Interprétation graphique



### Remarque

- Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , en effectuant le changement de variable  $h = x - x_0$ , on obtient :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(c'est une définition équivalente)

- Dire qu'une fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  c'est dire que la fonction taux d'accroissement  $\tau_{x_0}(f)$  est continue en  $x_0$  (on peut alors prolonger cette fonction par continuité en posant  $\tau_{x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$ ).

### Exemple

- Si  $f$  est constante sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable en tout point  $x_0$  de  $I$  et  $f'(x_0) = 0$ . En effet, si  $x_0 \in I$  et  $x \neq x_0$ , on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

- La fonction  $x \mapsto x$  est dérivable pour tout  $x_0$  de  $\mathbb{R}$  et  $f'(x_0) = 1$ . En effet, si  $x_0 \in I$  et  $x \neq x_0$ , on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$$

- La fonction  $x \mapsto x^2$  est dérivable pour tout  $x_0$  de  $\mathbb{R}$  et  $f'(x_0) = 2x_0$ . En effet, si  $x_0 \in I$  et  $x \neq x_0$ , on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0$$

- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable pour tout  $x_0$  de  $\mathbb{R}^{+*}$  et  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ . En effet, si  $x_0 \in I$  et  $x \neq x_0$ , on a :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(mais elle n'est pas dérivable en 0)

**Définition**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ .

- On dit que  $f$  est **dérivable à gauche** en  $x_0$  lorsque  $\tau_{x_0}(f)$  admet une limite finie à gauche en  $x_0$ . Cette limite est alors notée  $f'_g(x_0)$ .

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- On dit que  $f$  est **dérivable à droite** en  $x_0$  lorsque  $\tau_{x_0}(f)$  admet une limite finie à droite en  $x_0$ . Cette limite est alors notée  $f'_d(x_0)$ .

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Théorème 1.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ .

( $x_0$  n'est pas une extrémité de  $I$  : c'est un point intérieur à  $I$ )

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

*Démonstration.*

La démonstration est une conséquence directe de l'énoncé analogue sur la continuité (cf CH10).

$f$  est dérivable en  $x_0$

$$\Leftrightarrow \tau_{x_0}(f) \text{ est continue en } x_0$$

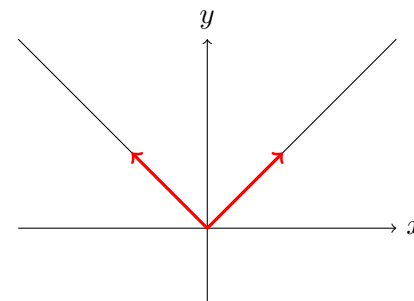
$$\Leftrightarrow \tau_{x_0}(f) \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0,$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \tau_{x_0}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \tau_{x_0}(f)(x)$$

$$\Leftrightarrow f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \quad \square$$

**Exemple**

- Cet énoncé est adapté aux fonctions qui sont définies par cas.
- La fonction  $x \mapsto |x|$  n'est pas dérivable en 0 car  $f'_g(0) = -1$  et  $f'_d(0) = 1$ .



- La fonction  $x \mapsto [x]$  n'est pas dérivable en les points  $x_0 \in \mathbb{Z}$ . Elle n'est déjà pas continue en ces points! (cf théorème ci-dessous)

**I.2. Propriétés des fonctions dérivables en un point****Théorème 2.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ .

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ est continue en } x_0$$

*Démonstration.*

Supposons que  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  et soit  $x \neq x_0$ .

Par définition, on a :  $\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Ainsi :  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \tau_{x_0}(f)(x)$ .

On en déduit que  $f$  est continue en  $x_0$  car somme de :

×  $x \mapsto f(x_0)$  continue en  $x_0$  car constante.

×  $x \mapsto (x - x_0) \tau_{x_0}(f)(x)$  continue en  $x_0$  car produit de :

(i)  $x \mapsto x - x_0$  continue en  $x_0$  car polynomiale,

(ii)  $x \mapsto \tau_{x_0}(f)(x)$  continue en  $x_0$  car  $f$  est dérivable en  $x_0$ . □

**Remarque**

La réciproque est fautive. Contre-exemples à cette réciproque :

- La fonction  $x \mapsto |x|$  qui est continue en 0 mais pas dérivable en 0.
- Les fonctions  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  ( $n > 1$ ) continues en 0 mais pas dérivables en 0.

**Théorème 3.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ .

( $x_0$  n'est pas une extrémité de  $I$  : c'est un point intérieur à  $I$ )

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ f \text{ admet un extremum local en } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

*Démonstration.*

Supposons que  $f$  admet un maximum local en  $x_0$ .

Par définition, il existe  $\alpha > 0$  tel que :  $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], f(x) \leq f(x_0)$ .

- Pour tout  $x \in ]x_0, x_0 + \alpha]$ , on a :  $x - x_0 > 0$ .

$$\text{On en déduit que : } \tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Comme  $f$  est dérivable en  $x_0$ ,  $\tau_{x_0}(f)(x)$  admet une limite finie lorsque  $x \rightarrow x_0$  qui est égale ici à  $f'_d(x_0)$  (on a considéré seulement les  $x > x_0$ ).

Par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient donc :  $f'_d(x_0) \leq 0$ .

- On démontre de même que :  $f'_g(x_0) \geq 0$  ( $x < x_0$  et toujours  $f(x) \leq f(x_0)$ ).

Enfin, comme  $f$  est dérivable en  $x_0$ , on obtient :

$$0 \leq f'_g(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0$$

On en déduit que  $f'(x_0) = 0$ . □

**Interprétation physique**

Reprenons l'exemple de l'alpiniste. Son altitude maximale est atteinte au sommet de la montagne qu'il gravit. Une fois en haut, sa vitesse instantanée est nulle : il ne monte ni ne descend.

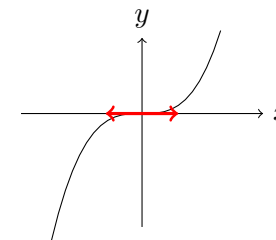
**Remarque**

- L'hypothèse  $x_0$  point intérieur est importante.

Considérons par exemple la fonction  $x \mapsto x$  sur  $[0, 1]$ . Cette fonction admet un minimum en 0 ( $= 0$ ) mais  $f'(0) = 1$ .

- La réciproque est fautive.

Le contre exemple classique est la fonction  $x \mapsto x^3$  qui est de dérivée nulle en 0 mais qui n'atteint pas de maximum (resp. minimum) en ce point.

**I.3. Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point****I.3.a) DL<sub>1</sub>(x<sub>0</sub>) et approximation affine de f en x<sub>0</sub>****Définition DL<sub>1</sub>(x<sub>0</sub>)**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $x_0$ .

- On dit que  $f$  possède **un développement limité d'ordre 1 en  $x_0$**  s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  tels que, au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

**Remarque**

- Si  $f$  admet un DL<sub>1</sub>(x<sub>0</sub>) alors on a :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - (a + b(x - x_0)) = 0$ .

Ainsi, les courbes représentatives de  $f$  et de la droite d'équation  $y = a + b(x - x_0)$  ont tendance à se confondre à proximité de  $x_0$ .

- C'est pourquoi on dit que la droite d'équation  $y = a + b(x - x_0)$  est une **approximation affine** de  $f$  en  $x_0$ .

↔ c'est la droite qui représente le mieux la fonction  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

**Théorème 4.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ admet un développement limité d'ordre 1 en } x_0$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont :  $\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{cases}$

Ainsi, si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , il existe  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  tq au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) Supposons  $f$  dérivable en  $x_0$ .

$$\text{Notons } \varepsilon(x) = \begin{cases} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c'est le  $\varepsilon$  donné par la formule finale)

On a alors  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  et de plus, pour tout  $x \neq x_0$  :

$$\varepsilon(x) = \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0)$$

$$\text{donc } \varepsilon(x) + f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{et } f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Cette formule est aussi valable pour  $x = x_0$ . Au final, on a bien :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Si  $f$  possède un développement limité d'ordre 1 alors :

×  $a = f(x_0)$  (le développement est vérifié en  $x_0$  !)

$$\times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b + \varepsilon(x)$$

On en conclut que  $\tau_{x_0}(f)$  admet une limite finie quand  $x \rightarrow x_0$ .

**Remarque**

D'après ce théorème, il y a unicité (lorsqu'il existe) du développement limité de  $f$  d'ordre 1 en  $x_0$ .

**I.3.b) Tangente de  $f$  en  $x_0$** **Définition**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

• Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , on appelle **tangente de  $f$  en  $x_0$**  la droite passant par  $(x_0, f(x_0))$  de coefficient directeur  $f'(x_0)$ .

• Autrement dit, c'est la droite d'équation :  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

**Remarque**

Il arrive parfois que la fonction  $f$  possède une dérivée à gauche et à droite en  $x_0$  sans pour autant être dérivable en  $x_0$ . Plus précisément, c'est le cas lorsque  $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ . On introduit alors les notions suivantes.

• La demi-tangente à gauche de  $f$  en  $x_0$  est la droite d'équation :  $y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$ .

• La demi-tangente à droite de  $f$  en  $x_0$  est la droite d'équation :  $y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$ .

**Définition (Tangente de la forme  $x = x_0$ )**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

Supposons que :

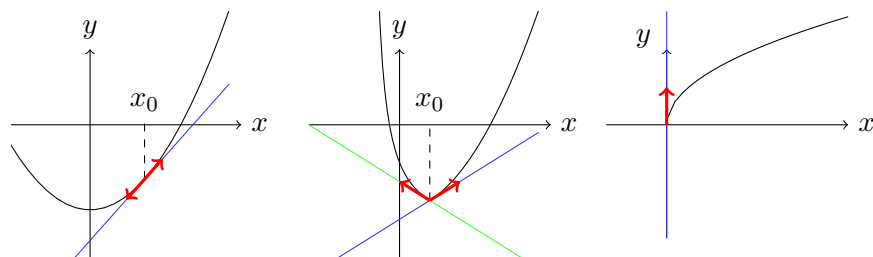
×  $f$  est continue en  $x_0$

×  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) ( $f$  est donc non dérivable en  $x_0$ )

• On appelle **tangente verticale de  $f$  en  $x_0$**  la droite verticale passant par le point  $(x_0, f(x_0))$ .

□ • Autrement dit, c'est la droite d'équation  $x = x_0$ .

## Représentation graphique



Tangente

Demi-tangentes

Tangente verticale

### I.3.c) $DL_1(x_0)$ et négligeabilité / équivalence

Dans l'écriture du  $DL_1(x_0)$  de  $f$ , on a introduit l'écriture  $(x - x_0) \varepsilon(x)$  où la fonction  $\varepsilon$  est telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ .

- La fonction  $x \mapsto (x - x_0) \varepsilon(x)$  est négligeable devant  $x \mapsto (x - x_0)$  en  $x_0$ .  
En effet :

$$\frac{\cancel{(x - x_0)} \varepsilon(x)}{\cancel{x - x_0}} = \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

- C'est une écriture générique d'une fonction négligeable devant  $x \mapsto (x - x_0)$  en  $x_0$ . Cette écriture étant un peu lourde, on utilisera généralement la notation  $o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$ .

#### Notation

Rappelons la notation introduite au CH10.

- $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$  si  $f$  est négligeable devant  $x \mapsto x - x_0$  i.e. si :

$$\frac{f(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

- $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$  si  $f$  est négligeable devant la fonction  $g$  i.e. si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Ainsi, si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , son  $DL_1(x_0)$  s'écrit sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$$

#### Exemple

Avec cette notation, au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1 + x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$e^x = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

#### Remarque

- Il est à noter que le premier terme non nul de ces développements fournit un équivalent de la fonction considérée.

On retrouve ainsi :  $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  (i.e.  $\frac{\ln(1 + x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ ).

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que  $y = \ln(1 + x)$  peut-être confondue avec sa tangente  $y = x$  à proximité de 0)

- D'autre part, on a aussi :  $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$ .

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que  $y = e^x$  peut-être confondue avec sa tangente  $y = 1 + x$  à proximité de 0)

- Enfin, on peut aussi écrire que :  $e^x - 1 = x + o_{x \rightarrow 0}(x)$ .

On retrouve alors :  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  (i.e.  $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ ).

(ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que  $y = e^x - 1$  peut-être confondue avec sa tangente  $y = x$  à proximité de 0)

## II. Dérivabilité globale

### II.1. Notion de fonction dérivable sur un ensemble

#### Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est dite **dérivable sur**  $I$  si elle est dérivable en tout point de  $I$ . On appelle alors **fonction dérivée** et on note  $f'$  la fonction suivante.

$$f' : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$$

- Une fonction est dite dérivable sur une réunion finie d'intervalles  $D$  si elle est dérivable sur chacun des intervalles composant  $D$ .  
(la fonction  $x \mapsto |x|$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  : en effet, elle est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ .)

### II.2. Opérations sur les fonctions dérivables

#### II.2.a) Dérivabilité et opérations algébriques

##### Théorème 5.

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Supposons que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ .

Alors les fonctions  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $f \times g$  sont dérivables sur  $I$ . De plus :

$$1) \quad \boxed{(f + g)' = f' + g'} \qquad 2) \quad \boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}$$

$$3) \quad \boxed{(f \times g)' = f' \times g + f \times g'}$$

*Démonstration.*

Soient  $x_0 \in I$  et  $x \in I$  tel que  $x \neq x_0$ .

1) Dans le cas de la somme, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(f + g)(x) &= \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \tau_{x_0}(f)(x) + \tau_{x_0}(g)(x) \\ &\quad \begin{array}{cc} \downarrow \scriptstyle 0x \downarrow x & \downarrow \scriptstyle 0x \downarrow x \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{array} \end{aligned}$$

2) Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(\lambda f)(x) &= \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lambda \tau_{x_0}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda f'(x_0) \end{aligned}$$

3) Pour le cas du produit, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(f \times g)(x) &= \frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0)) \times g(x) + (g(x) - g(x_0)) \times f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \tau_{x_0}(f)(x) \times g(x) + f(x_0) \times \tau_{x_0}(g)(x) \\ &\quad \begin{array}{cc} \downarrow \scriptstyle 0x \downarrow x & \downarrow \scriptstyle 0x \downarrow x \\ f'(x_0) \times g(x_0) & f(x_0) \times g'(x_0) \end{array} \quad \square \end{aligned}$$

**Théorème 6.**

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supposons que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ .

Supposons de plus que  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Alors les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont dérivables sur  $I$ . De plus :

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

*Démonstration.*

Soient  $x_0 \in I$  et  $x \in I$  tel que  $x \neq x_0$ .

1) Pour le cas de l'inverse :

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(f)(x) &= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \times \frac{1}{g(x)g(x_0)} \\ &\quad \begin{array}{ccc} \downarrow \text{0x} & & \downarrow \text{0x} \\ -g'(x_0) & & \frac{1}{(g(x_0))^2} \end{array} \end{aligned}$$

2) Le cas du produit se déduit des cas du produit et de l'inverse.  $\square$

**Théorème 7.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supposons que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :  $\left\{ \begin{array}{l} f^k \text{ est dérivable sur } I \\ \boxed{(f^k)' = k f^{k-1} \times f'} \end{array} \right.$

*Démonstration.*

Par récurrence en écrivant  $f^{k+1} = f \times f^k$ .

**Application**

- Les fonctions constantes sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  (de dérivée nulle).
- $x \mapsto x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée la fonction constante  $x \mapsto 1$ .
- Par le théorème précédent (puissances),  $x \mapsto x^k$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $x \mapsto k x^{k-1}$ .
- Au final : toutes les fonctions polynomiales sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  (car obtenues comme sommes et produits par un réel / par une fonction).
- Les fonctions rationnelles *i.e.* de la forme  $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$  avec  $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$  sont dérivables sur tout intervalle  $I$  sur lequel  $Q$  ne s'annule pas.

**II.2.b) Dérivabilité des fonctions composées****Théorème 8.**

Soient  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $g(I) \subset J$ .

Supposons  $g$  est dérivable sur  $I$  et que  $h$  est dérivable sur  $J$ .

Alors  $h \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable sur  $I$  et  $\boxed{(h \circ g)' = (h' \circ g) \times g'}$

*Démonstration.*

Soient  $x_0 \in I$  et  $x \in I$  tel que  $x \neq x_0$ .

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(h \circ g)(x) &= \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{h(g(x)) - h(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \tau_{g(x_0)}(h)(g(x)) \times \tau_{x_0}(g)(x) \end{aligned}$$

On note alors  $y_0 = g(x_0)$ . En effectuant le changement de variable  $y = g(x)$  ( $x \rightarrow x_0 \Rightarrow y \rightarrow g(x_0) = y_0$ ), on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{y_0}(h)(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \tau_{y_0}(h)(y) = h'(y_0) = h'(g(x_0))$$

Dans cette démo, on a choisi  $x$  tel que  $g(x) \neq g(x_0)$ .

Pour trouver un tel  $x$ , il faut que  $g$  ne soit pas constante au voisinage de  $x_0$ .

Si  $g$  est constante, on a  $g' = 0$  et la formule est encore vérifiée ( $h \circ g$  est aussi constante)  $\square$



**Proposition 1.**

Soit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supposons que  $g$  est dérivable sur  $I$ .

a) La fonction  $e^g$  est dérivable sur  $I$  et  $(e^g)' = e^g \times g'$

b) Si de plus  $g$  est strictement positive sur  $I$ , on a :

(i)  $\sqrt{g}$  est dérivable sur  $I$  et (ii)  $\ln g$  est dérivable sur  $I$  et

$$(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$$

$$(\ln g)' = \frac{g'}{g}$$

**Exemple**

Calcul de la dérivée de  $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ .

•  $f$  est définie sur  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -2] \cup ]1, +\infty[$ .

En effet, la quantité  $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$  est définie dès que  $g(x) = \frac{x+2}{x-1} \geq 0$ .

Il suffit alors de noter que  $g(x)$  a même signe que la quantité  $(x+2)(x-1)$ .

•  $f$  est dérivable sur  $D = \mathcal{D}_f \setminus \{-2\}$ . En effet,  $f$  est la composée de :

×  $g : x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$  dérivable (notamment) sur  $D$ .

De plus,  $g(D) \subset ]0, +\infty[$ .

×  $h : x \mapsto \sqrt{x}$  dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

• On a alors, pour tout  $x \in D = ]-\infty, -2] \cup ]1, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} \times \frac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}} \times \frac{-3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

**Application : dérivabilité de l'élevation à la puissance quelconque**

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction  $f : x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$  (par définition).

• Cette fonction est définie pour tout  $x > 0$ . Autrement dit :  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$ .

• La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  car est la composée de :

×  $g : x \mapsto a \ln x$  dérivable sur  $]0, +\infty[$ . De plus,  $g(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$ .

×  $h : x \mapsto e^x$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a :  $f'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = x^{a-1}$ .

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in ]0, +\infty[, \quad (x^a)' = a x^{a-1}$$

**II.2.c) Dérivabilité des fonctions réciproques****Théorème 9.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $I$  est un intervalle).

Supposons que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .

Supposons que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

Supposons que  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Alors  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  est dérivable sur  $f(I)$ , et :  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

*Démonstration.*

Soit  $y_0 \in f(I)$ . Il existe donc  $x_0 \in I$  tel que  $y_0 = f(x_0)$ .

Pour tout  $y \in f(I)$  tel que  $y \neq y_0$  :

$$\tau_{y_0}(f^{-1})(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$$

Comme la fonction  $f^{-1}$  est continue, en posant le changement de variable  $x = f^{-1}(y)$  ( $y \rightarrow y_0 \Rightarrow x \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$ ), on obtient :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

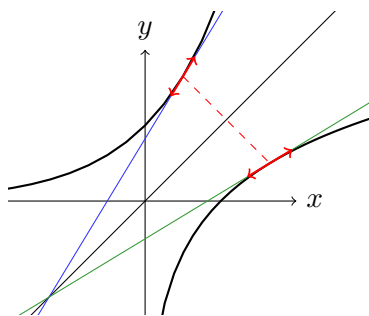
Et comme  $f'(x_0) \neq 0$ ,  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ .  $\square$

### Remarque

- L'hypothèse de bijectivité est généralement obtenue par le théorème de la bijection. On rappelle que si  $f$  est continue et strictement croissante sur  $I$ , alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .
- On peut retrouver la formule du théorème via l'égalité  $f \circ f^{-1} = \text{id}$ . En effet, en dérivant formellement cette égalité, on obtient :

$$(f' \circ f^{-1}) \times (f^{-1})' = 1$$

### Interprétation géométrique



- La formule :  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$  signifie que le coefficient directeur de la tangente en  $y_0$  de  $f^{-1}$  est l'inverse de la tangente en  $x_0$  de  $f$ .
- Les tangentes de  $f^{-1}$  en  $y_0$  et de  $f$  en  $x_0$  sont symétriques par rapport à l'axe  $y = x$ .

## II.3. Dérivées successives

### II.3.a) Définition

#### Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\square$  Supposons que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

- On dit que  $f$  est  **$n$  fois dérivable** sur  $I$  si :
  - $\times$   $f$  est  $n - 1$  fois dérivable sur  $I$ ,
  - $\times$   $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $I$ .
 On note alors :  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- On dit que  $f$  est **indéfiniment dérivable** sur  $I$  si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ .



Même si les notations sont proches, il ne faut pas confondre :

- $\times$   $f^n$  qui est la puissance  $n^{\text{ème}}$  de la fonction  $f$ ,
- $\times$   $f^{(n)}$  qui est la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de la fonction  $f$ .

### Remarque

Détaillons cette définition pour bien la comprendre.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$ .

- Si  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  est elle-même dérivable sur  $I$ , on peut considérer la dérivée de  $f'$ , appelée **dérivée seconde** de  $f$  et notée  $(f')' = f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Si  $n \in \mathbb{N}$ , on peut définir la **dérivée  $n^{\text{ème}}$**  de  $f$  comme suit.
  - 0)  $f^{(0)} = f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,
  - 1) Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , on note  $f^{(1)} = f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,
  - $\vdots$
  - $n$ ) Si  $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $I$ , on note  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemple**

- Les fonctions polynomiales sont indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction exp est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- On en déduit que la fonction ln est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- La fonction  $f : x \mapsto x \sqrt{|x|}$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Démonstrons-le.

La fonction  $x \mapsto \sqrt{|x|}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  car est la composée de :

×  $g : x \mapsto |x|$  dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . De plus,  $g(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^{+*}$ .

×  $h : x \mapsto \sqrt{x}$  dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

On en déduit que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

De plus, la fonction  $f$  est dérivable en 0. En effet :

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x \sqrt{|x|}}{x} = \sqrt{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Enfn, pour  $x \neq 0$ , on a :

× si  $x > 0$  :  $f(x) = x \sqrt{x}$  et  $f'(x) = \sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$ .

× si  $x < 0$  :  $f(x) = x \sqrt{-x}$ . On en déduit :

$$f'(x) = \sqrt{-x} - x \frac{1}{2\sqrt{-x}} = \sqrt{-x} + \frac{\sqrt{-x} \sqrt{x}}{2\sqrt{-x}} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \sqrt{-x}$$

On obtient alors que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$ .

- La fonction  $f' : x \mapsto \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$  n'est pas dérivable en 0. En effet :

$$\begin{aligned} \tau_0(f')(x) &= \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{|x|}}{\text{sgn}(x)\sqrt{|x|}\sqrt{|x|}} \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \quad (+\infty \text{ à droite et } -\infty \text{ à gauche}) \end{aligned}$$

On en déduit que  $f$  n'est pas deux fois dérivable en 0.

**II.3.b) Caractère  $C^n$  et  $C^\infty$** **Définition**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- On dit que  $f$  est de **classe  $C^n$  sur  $I$**  si
  - ×  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ ,
  - ×  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ .
- Ainsi, on dit que  $f$  est de classe  $C^0$  sur  $I$  si  $f$  est continue sur  $I$ .
- Enfin, on dit que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ .

**Remarque**

- Si  $f$  est de classe  $C^n$ , on dit aussi que  $f$  est  **$n$  fois continûment dérivable**. Il est à noter que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f^{(k)}$  est continue :
  - × si  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ ,  $f^{(k)}$  est continue car dérivable.
  - ×  $f^{(n)}$  est continue par définition.
- Notez que  $f$  est  $C^\infty$  signifie qu'elle est indéfiniment dérivable (ces deux notions coïncident).

**Exemple**

- Les fonctions polynomiales sont  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction exp est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- On en déduit que la fonction ln est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- La fonction  $f : x \mapsto x \sqrt{|x|}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Sa dérivée  $f' : x \mapsto \frac{3}{2} \sqrt{|x|}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Par contre,  $f'$  n'est pas dérivable sur  $\mathbb{R}$  (car non dérivable en 0).

Ainsi  $f$  n'est pas  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

Mais on peut montrer qu'elle est  $C^\infty$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ .

### II.3.c) Opérations algébriques sur les fonctions de classe $C^n$

#### Théorème 10.

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables (resp.  $C^n/C^\infty$ ) sur  $I$ .

- Les fonctions  $f + g$ ,  $\lambda f$ ,  $f \times g$  sont  $n$  fois dérivables (resp.  $C^n/C^\infty$ ) sur  $I$ .
- Si la fonction  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors le quotient  $\frac{f}{g}$  est  $n$  fois dérivable (resp.  $C^n/C^\infty$ ) sur  $I$ .

De plus, si  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables, on a les formules suivantes :

a)  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$

b)  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$

c) Formule de Leibniz :  $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \times g^{(k)}$

*Démonstration.*

Chacune de ces formules se démontre par récurrence (on prouve au passage le caractère dérivable). On laisse **a)** et **b)** en exercice.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

1) **Initialisation** :

$$(f \times g)^{(0)} = f \times g \text{ et } \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = f \times g.$$

La propriété  $\mathcal{P}(0)$  est donc vérifiée.

2) **Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

$$(i.e. (f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}).$$

Tout d'abord, remarquons que :  $(f \times g)^{(n+1)} = ((f \times g)^{(n)})'$ .

Or, par hypothèse de récurrence ( $\mathcal{P}(n)$ ), on sait que :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} & ((f \times g)^{(n+1)})' \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} \times g^{(n-k)})' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + f^{(k)} \times g^{(n-k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} \times g^{(n-(k-1))} \right) + \binom{n}{n} f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\ &+ \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + \binom{n}{0} f^{(0)} \times g^{(n+1)} \\ &= f^{(0)} g^{(n+1)} + \left( \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} g^{(0)} \\ &= f^{(0)} \times g^{(n+1)} + \left( \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \right) + f^{(n+1)} \times g^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

L'avant dernière ligne est obtenue grâce à la formule du triangle de Pascal.

La dernière est obtenue en remarquant que :

$$f^{(0)}g^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} f^{(0)}g^{(n+1)} \text{ et } f^{(n+1)}g^{(0)} = \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}g^{(0)}.$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vérifiée.

Ainsi, par principe de récurrence, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ .

### Exemple

Déterminer la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $h : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$ .

- Notons  $f : x \mapsto x^2 + 1$  et  $g : x \mapsto e^x$ .
- $f$  est polynomiale donc  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$  et  $f^{(3)}(x) = 0$  (d'où :  $\forall k \geq 3, f^{(k)} = 0$ ).
- La fonction  $g$  est elle aussi  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g^{(n)} = g$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (f \times g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} f^{(k)} \times g + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g \\ &= \binom{n}{0} f^{(0)} \times g + \binom{n}{1} f^{(1)} \times g + \binom{n}{2} f^{(2)} \times g \\ &= f \times g + n f' \times g + \frac{n(n-1)}{2} f'' \times g \\ &= (f + n f' + \frac{n(n-1)}{2} f'') \times g \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\times h^{(0)}(x) = h(x) = (x^2 + 1)e^x.$$

$$\times h^{(1)}(x) = h'(x) = (2x + (x^2 + 1))e^x = (x + 1)^2 e^x.$$

$$\times \text{pour tout } n \geq 2 : h^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1) + 1)e^x.$$

### Théorème 11.

Soient  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $g(I) \subset J$ .

Supposons que  $h$  est  $n$  fois dérivable (resp.  $C^n/C^\infty$ ) sur  $J$ .

Supposons que  $g$  est  $n$  fois dérivable (resp.  $C^n/C^\infty$ ) sur  $I$ .

□ Alors  $h \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$  est  $n$  fois dérivable (resp.  $C^n/C^\infty$ ) sur  $I$ .

*Démonstration.*

Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où  $\mathcal{P}(n) : \left. \begin{array}{l} h : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ est } C^n \text{ sur } J \\ g : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est } C^n \text{ sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow h \circ g \text{ est } C^n \text{ sur } I.$

#### 1) Initialisation :

Soient  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^0$  sur  $J$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^0$  sur  $I$ .

- $h \circ g$  est continue sur  $I$  car c'est la composée de :
  - ×  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $I$  et telle que  $g(I) \subset J$ ,
  - ×  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $J$ .

La propriété  $\mathcal{P}(0)$  est donc vérifiée.

#### 2) Héritéité : soit $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Soient  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  sur  $J$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ .

- La fonction  $h \circ g$  est dérivable sur  $I$  comme composée.
- De plus :  $(h \circ g)' = (h' \circ g) \times g'$ .
- Comme  $h$  est  $C^{n+1}$  sur  $J$ , alors  $h'$  est  $C^n$  sur  $J$ .  
De plus,  $g$   $C^n$  sur  $I$  (car  $C^{n+1}$  sur  $I$ ).  
On applique alors l'hypothèse de récurrence à  $h'$  et  $g$ .  
On en déduit donc que :  $h' \circ g$  est de classe  $C^n$  sur  $I$ .

Ainsi,  $(h \circ g)'$  est  $C^n$  sur  $I$  par produit de fonctions  $C^n$  sur  $I$ .

Donc  $h \circ g$  est  $C^{n+1}$  sur  $I$ . D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ . □

### II.3.d) Dérivées $k^{\text{ème}}$ de fonctions classiques

#### Proposition 2.

1) Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : x \mapsto (x - a)^n$ . Alors  $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \boxed{((x - a)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n - k)!} (x - a)^{n-k}}$$

(on en déduit la dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $x \mapsto x^n$  en prenant  $a = 0$ )

2) Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $g : x \mapsto \frac{1}{x - a}$ . Alors  $g$  est  $C^\infty$  sur  $] -\infty, a[ \cup ] a, +\infty[$  et :

$$\forall k \geq 0, \quad \boxed{\left(\frac{1}{x - a}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x - a)^{k+1}}}$$

3) La fonction  $x \mapsto \ln x$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall k \geq 1, \quad \boxed{(\ln x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1} (k - 1)!}{x^k}}$$

(quelle est la dérivée de  $x \mapsto \ln |x|$  ?)

4) La fonction  $x \mapsto e^x$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall k \geq 0, \quad \boxed{(e^x)^{(k)} = e^x}$$

5) Soit  $a > 0$ . La fonction  $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall k \geq 0, \quad \boxed{(a^x)^{(k)} = (\ln a)^k a^x}$$

*Démonstration.*

Par récurrence !

On peut retrouver ces formules en généralisant depuis les petites valeurs.

3) Conséquence directe de 2).

4) Dérivée de exp peut s'obtenir comme dérivée de la réciproque de ln.  $\square$

## III. Les théorèmes de la dérivabilité sur un intervalle

### III.1. Théorème de Rolle

#### Théorème 12.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ continue sur } [a, b] \\ \bullet f \text{ dérivable sur } ]a, b[ \\ \bullet f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{il existe } c \in ]a, b[ \text{ tel que } f'(c) = 0$$

*Démonstration.*

• Tout d'abord, on sait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi,  $f([a, b]) = [m, M]$  où  $m = \min_{[a, b]} f = f(c_1)$  et  $M = \max_{[a, b]} f = f(c_2)$

avec  $c_1 \in [a, b]$  et  $c_2 \in [a, b]$ .

• Le but est alors de démontrer que l'un de ces deux extrema est atteint sur  $]a, b[$ . Si c'est le cas, on conclut par le théorème 3 que  $f'(c) = 0$ .

• On distingue alors deux cas :

1) Si  $m = M$  alors pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M = m$ .

Donc  $f$  est constante sur  $[a, b]$ .

Ainsi  $f' = 0$  sur  $[a, b]$  et tout  $c \in ]a, b[$  est tel que  $f'(c) = 0$ .

2) Si  $m \neq M$ , trois cas se présentent :

× soit  $c_1 = a$  : on démontre dans ce cas que  $c_2 \in ]a, b[$ .

Comme  $c_1 = a$ , on a  $m = f(c_1) = f(a)$ . Rappelons que  $M = f(c_2)$ .

$c_2 \neq a$  (sinon  $f(c_2) = f(a)$  et alors  $M = f(a) = m$ ),

$c_2 \neq b$  (sinon  $f(c_2) = f(b)$  et alors  $M = f(b) = f(a) = m$ ).

Ainsi,  $c_2 \in ]a, b[$ . Enfin, comme  $f$  est dérivable en  $c_2 \in ]a, b[$  et  $y$  atteint son maximum, on a  $f'(c_2) = 0$ .

- × soit  $c_1 \in ]a, b[$  : comme  $f$  est dérivable en  $c_1 \in ]a, b[$  et y atteint son minimum, on a  $f'(c_1) = 0$ .
- × soit  $c_1 = b$  : on démontre, comme dans le premier cas que  $c_2 \in ]a, b[$ . Comme  $c_1 = b$ , on a  $m = f(c_1) = f(b)$ . Rappelons que  $M = f(c_2)$ .  
 $c_2 \neq a$  (sinon  $f(c_2) = f(a)$  et alors  $M = f(a) = f(b) = m$ ),  
 $c_2 \neq b$  (sinon  $f(c_2) = f(b)$  et alors  $M = f(b) = m$ ).  
Ainsi,  $c_2 \in ]a, b[$ . Enfin, comme  $f$  est dérivable en  $c_2 \in ]a, b[$  et y atteint son maximum, on a  $f'(c_2) = 0$ .

□

### Remarque

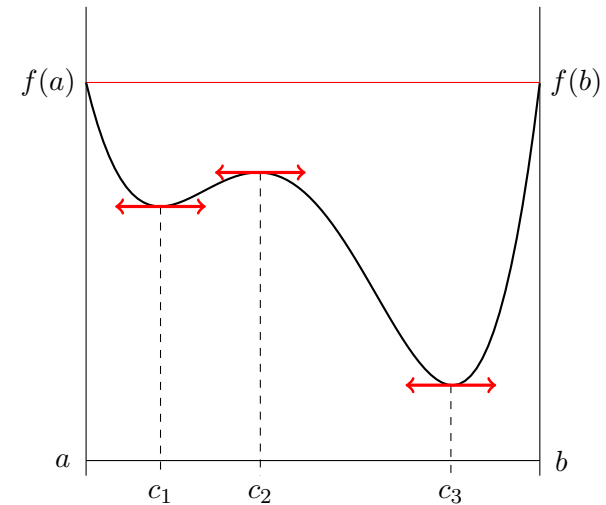
- L'hypothèse  $f$  dérivable sur  $]a, b[$  (ouvert) est l'hypothèse minimale. Évidemment, le résultat reste vrai si  $f$  est dérivable sur  $]a, b]$ ,  $[a, b[$ ,  $[a, b]$  puisque  $f$  est alors dérivable sur  $]a, b[$ .
- Par contre, l'hypothèse  $f$  continue sur  $[a, b]$  (fermé) est fondamentale.
- Ces deux hypothèses de régularité peuvent être remplacées par l'hypothèse plus forte :  $f$  dérivable sur  $[a, b]$ .  
*(ces remarques sont aussi valables pour les énoncés qui suivent)*

### Autre formulation

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(a, b) \in I^2$  où  $I$  est un intervalle.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \bullet f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{il existe } c \in ]a, b[ \text{ tel que } f'(c) = 0$$

### Interprétation géométrique.



La courbe représentative de  $f$  possède (au moins) une tangente parallèle à l'axe des abscisses (et donc parallèle à la corde joignant  $(a, f(a))$  à  $(b, f(b))$ ).

### Interprétation physique

Reprenons l'exemple de l'alpiniste.

Si son altitude au temps  $t_1$  est celle au temps  $t_2$  cela signifie :

- × soit qu'il a stagné durant cette période. Sa vitesse instantanée de déplacement verticale a donc été nulle à tout moment sur cette période.
- × soit qu'il est descendu vers un point plus bas puis est monté de nouveau. À ce point le plus bas, sa vitesse instantanée était nulle.

### III.2. Théorème des accroissements finis

#### Théorème 13.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> continue sur <math>[a, b]</math></li> <li>• <math>f</math> dérivable sur <math>]a, b[</math></li> </ul>	<p>il existe <math>c \in ]a, b[</math> tel que</p> $\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------

*Démonstration.*

Il s'agit de comparer  $f$  à sa corde passant par  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ .

Cette corde a pour équation  $y = g(x)$  où  $g$  est définie par :

$$g : x \mapsto f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Considérons alors la fonction  $h = f - g$ . Elle vérifie :

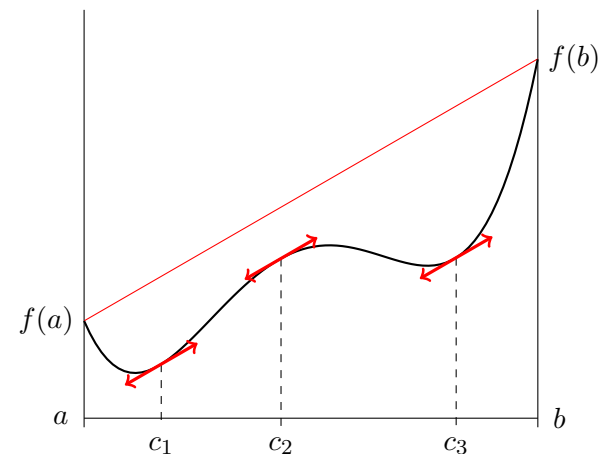
- ×  $h$  est continue sur  $[a, b]$  (car  $f$  et  $g$  le sont),
- ×  $h$  est dérivable sur  $]a, b[$  (car  $f$  et  $g$  le sont),
- ×  $h(a) = f(a) - g(a) = 0 = f(b) - g(b) = h(b)$ .

Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ .

Or, pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Au point  $c$ , on a donc :  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

#### Interprétation géométrique.



La courbe représentative de  $f$  possède (au moins) une tangente parallèle à sa corde passant par  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ .

#### Interprétation physique

Ce théorème compare taux d'accroissement et dérivée en un point.

- Reprenons l'exemple de la voiture : si elle a roulé en moyenne à 100 km/H entre deux instants  $a$  et  $b$  (elle a pu rouler à 50 km/H ou parfois à 130 km/H) elle a forcément eu, à un instant  $c$  une vitesse instantanée égale à 100 km/H.

#### □ Remarque

Le théorème de accroissements finis peut être vu comme une généralisation du théorème de Rolle. En effet, si on applique le TAF à une fonction vérifiant de plus  $f(a) = f(b)$ , on aboutit à la conclusion :  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$  pour un  $c \in ]a, b[$ , ce qui démontre que  $f'(c) = 0$ .



### III.3. Inégalité des accroissements finis

#### Théorème 14.

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ continue sur } [a, b] \\ \bullet f \text{ dérivable sur } ]a, b[ \\ \bullet \text{ il existe } m \text{ et } M \text{ tels que} \\ \quad \forall u \in ]a, b[, m \leq f'(u) \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

Démonstration.

D'après le TAF, il existe  $c \in ]a, b[$ ,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

On a alors :  $m \leq f'(c) \leq M$ , ce qui conclut cette démonstration.  $\square$

#### Interprétation physique

- Si la fonction  $f$  est  $C^1$ , alors  $f'$  est  $C^0$  sur  $[a, b]$ .  
On peut alors choisir  $m = \min_{[a,b]} f'$  et  $M = \max_{[a,b]} f'$ .
- L'IAF stipule alors que la vitesse moyenne entre deux instants  $a$  et  $b$  est comprise entre la plus petite vitesse instantanée et la plus grande vitesse instantanée.

#### Autre formulation

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(x, y) \in I^2$  où  $I$  est un intervalle.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \bullet \text{ il existe } M \geq 0, \\ \quad \forall u \in I, |f'(u)| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2, \\ |f(y) - f(x)| \leq M |y - x| \end{array}$$

#### Application à l'étude de suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$

#### Théorème 15 (le redémontrer dans chaque exercice).

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $I$  intervalle.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Supposons que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

Supposons qu'il existe  $M \geq 0$  tel que :  $\forall u \in I, |f'(u)| \leq M$ .

Supposons que  $I$  est stable par  $f$  (i.e.  $f(I) \subset I$ ).

Supposons que  $f$  admet un point fixe  $\ell \in I$  (i.e.  $f(\ell) = \ell$ ).

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n \in I}$
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{|u_{n+1} - \ell| \leq M |u_n - \ell|}$
- 3)  $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|}$
- 4) Si on sait de plus que  $0 \leq M < 1$ , alors  $(u_n)$  est convergente, de limite  $\ell$ .

Démonstration.

- 1) Donnons l'idée de la récurrence :  $u_0 \in I$  (initialisation). Si on sait que  $u_n \in I$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $u_{n+1} = f(u_n) \in I$  car  $I$  est stable par  $f$  (hérédité).
- 2) D'après l'IAF,  $|f(u_n) - f(\ell)| \leq M |u_n - \ell|$ .  
Il suffit alors de remarquer que  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(\ell) = \ell$ .
- 3) Donnons l'idée de la récurrence :  $M^0 = 1$  donc l'étape d'initialisation est directe. Supposons que  $|u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .  
Or, par la propriété précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M |u_n - \ell| \leq M \times M^n |u_0 - \ell| = M^{n+1} |u_0 - \ell|$$

- 4) Si  $0 \leq M < 1$ , alors  $M^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . On en déduit, par le théorème d'encadrement, que  $u_n - \ell \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , ce qui équivaut à  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .  $\square$

## IV. Dérivation et sens de variation

### IV.1. Caractérisation des fonctions monotones par le signe de la dérivée

#### Théorème 16.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$  (où  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

- a)  $f$  est croissante sur  $I \iff f'$  est positive ou nulle sur  $I$   
 b)  $f$  est décroissante sur  $I \iff f'$  est négative ou nulle sur  $I$   
 c)  $f$  est constante sur  $I \iff f'$  est nulle sur  $I$

*Démonstration.*

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .

a) ( $\Rightarrow$ ) Supposons  $f$  croissante sur  $I$ . Soit  $x_0 \in I$ . Pour tout  $x \in I \setminus \{x_0\}$  :

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

En effet, la croissance de  $f$  signifie que  $f(x) - f(x_0)$  est du signe de  $x - x_0$ .  
 $f$  étant dérivable en  $x_0$ , on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

( $\Leftarrow$ ) Réciproquement, supposons  $f' \geq 0$  sur  $I$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $I$  tels que  $x \leq y$ .

En appliquant le TAF à la fonction  $f$  dérivable sur  $[x, y]$ , on obtient :

$$\exists c \in ]x, y[, f(y) - f(x) = \underbrace{(y - x)}_{\geq 0} \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \geq 0$$

Ainsi  $f(y) \geq f(x)$ .

b) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction  $g = -f$ .

c) Il suffit de remarquer qu'une fonction constante est à la fois croissante et décroissante et que  $f' = 0$  signifie que  $f' \geq 0$  et  $f' \leq 0$ .  $\square$

#### Remarque

• L'hypothèse  $f$  dérivable sur  $I$  n'est pas l'hypothèse minimale.

On peut énoncer le théorème avec l'hypothèse suivante :

×  $f$  continue sur  $I$ ,

×  $f$  dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ .

Sous cette hypothèse, on a alors :  $f$  croissante sur  $I \iff f' \geq 0$  sur  $\overset{\circ}{I}$ .

• Cette remarque reste vraie pour les résultats issus de ce théorème.

#### Théorème 17.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$  (où  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

- a)  $f'$  strictement positive sur  $I \Rightarrow f$  strictement croissante sur  $I$   
 b)  $f'$  strictement négative sur  $I \Rightarrow f$  strictement décroissante sur  $I$

*Démonstration.*

Même démonstration que la précédente : soient  $(x, y) \in I^2$  tel que  $x < y$ .

En appliquant le TAF à la fonction  $f$  dérivable sur  $[x, y]$ , on obtient :

$$\exists c \in ]x, y[, f(y) - f(x) = \underbrace{(y - x)}_{>0} \underbrace{f'(c)}_{>0} > 0 \quad \square$$

#### Remarque

• Il n'y a pas équivalence ! Pour s'en convaincre, on peut considérer la fonction  $f : x \mapsto x^3$  qui est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

Pourtant,  $f' : x \mapsto 3x^2$  n'est pas strictement positive :  $f'(0) = 0$ .

• Si l'on reprend la démo précédente pour une fonction  $f$  strictement croissante, on obtient :  $\tau_{x_0}(f)(x) > 0$ . Mais cette inégalité stricte n'est pas respectée par passage à la limite :  $f'(x_0) \geq 0$ .

• Mais alors comment démontrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ?

(i) Revenir à la définition : soit  $x, y$  tels que  $x < y$ . Alors :

$$y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + yx + x^2) = (y - x)\left(\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\right) > 0.$$

(ii) Utiliser le théorème suivant, plus précis.

**Théorème 18.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$  (où  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

- |                                                                           |               |                                      |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------|--------------------------------------|
| a) $f' \geq 0$ sur $I$ et $f'$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points | $\Rightarrow$ | $f$ strictement croissante sur $I$   |
| b) $f' \leq 0$ sur $I$ et $f'$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points | $\Rightarrow$ | $f$ strictement décroissante sur $I$ |

*Démonstration.*

a) On note  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ces points où  $f'$  s'annule.

Ainsi,  $f'$  est strictement positive sur chacun des intervalles  $]a_i, a_{i+1}[$ .

Il reste à montrer que la stricte croissance est préservée même si l'on change d'intervalle, ce que l'on démontre de proche en proche.

Soient  $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$  et  $x \in ]a_i, a_{i+1}[$ ,  $y \in ]a_{i+1}, a_{i+2}[$  :

$$\begin{array}{ccc}
 f(x) < \sup_{]a_i, a_{i+1}[} f & = & \lim_{x \rightarrow a_{i+1}^-} f(x) = f(a_{i+1}) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & \text{(théorème limite monotone)} & \text{(continuité de } f\text{)}
 \end{array}$$

De même, on a :

$$\begin{array}{ccc}
 f(y) < \inf_{]a_{i+1}, a_{i+2}[} f & = & \lim_{x \rightarrow a_{i+1}^+} f(x) = f(a_{i+1}) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & \text{(théorème limite monotone)} & \text{(continuité de } f\text{)}
 \end{array}$$

On en déduit que  $f(x) < f(a_{i+1}) < f(y)$ .

□

**Application : tableau de variations.**

- Par le théorème 17 et théorème 18 les flèches d'un tableau de variations signifient la stricte monotonie de la fonction considérée.
- Lorsque l'on étudie une fonction  $f$  telle que  $f' \geq 0$  et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, il n'y a pas lieu de faire apparaître deux flèches de même type consécutives.

Par exemple, la fonction  $x \mapsto x^3$  a pour tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f$	$-\infty$	↗	$+\infty$

- La présence de deux flèches consécutives de même type est à réserver au cas où la fonction  $f$  n'est pas définie au point considéré.

On peut illustrer ce cas par la fonction  $f : x \mapsto -\frac{1}{x}$  (de dérivée  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ).

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f$	↗	↘	↗
	$0$	$+\infty$	$0$
	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

## IV.2. Extremum local d'une fonction dérivable

### Théorème 19.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$  (où  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

Soit  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ .

$f' \text{ s'annule en changeant de signe en } x_0 \in \overset{\circ}{I} \quad \Rightarrow \quad f \text{ admet un extremum local en } x_0 \in \overset{\circ}{I}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Démonstration.*

Supposons que  $f'$  s'annule en changeant de signe en  $x_0$ .

Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que (par exemple) :

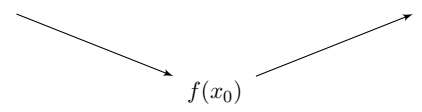
×  $f' \leq 0$  sur  $[x_0 - \alpha, x_0[$ .

La fonction  $f$  est donc décroissante sur  $[x_0 - \alpha, x_0[$ .

×  $f' \geq 0$  sur  $]x_0, x_0 + \alpha]$ .

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $]x_0, x_0 + \alpha]$ .

Ainsi, elle admet un minimum en  $x_0$ .

$x$	$x_0 - \alpha$	$x_0$	$x_0 + \alpha$
$f'(x)$	+	0	+
$f$			

□

### Remarque

- Ce théorème peut être vu comme une réciproque du théorème 3 du début de chapitre ( $f$  admet un extremum local en  $x_0 \in \overset{\circ}{I} \Rightarrow f'(x_0) = 0$ ).
- On rappelle que l'hypothèse  $x_0$  point intérieur est importante. On peut considérer  $x \mapsto x$  sur  $[0, 1]$  : cette fonction admet un minimum en  $0 (= 0)$  mais  $f'(0) = 1$ .

## V. Fonctions convexes

### V.1. Définition et premières caractérisations

#### Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est dite **convexe** sur l'intervalle  $I$  si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2 \\ \text{tels que } t_1 + t_2 = 1, \end{array} \right\} f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$$

- De manière équivalente,  $f$  est **convexe** sur  $I$  si

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall \lambda \in [0, 1] \end{array} \right\} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

- La fonction  $f$  est dite **concave** sur l'intervalle  $I$  si  $-f$  est convexe sur  $I$ . Autrement dit,  $f$  est concave sur  $I$  si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall \lambda \in [0, 1] \end{array} \right\} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

(permet de traduire les propriétés de convexité pour les fonctions concaves)

#### Remarque

- De manière générale, si  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  avec  $v > u$ , alors

$$\{\lambda u + (1 - \lambda)v \mid \lambda \in [0, 1]\} = [u, v]$$

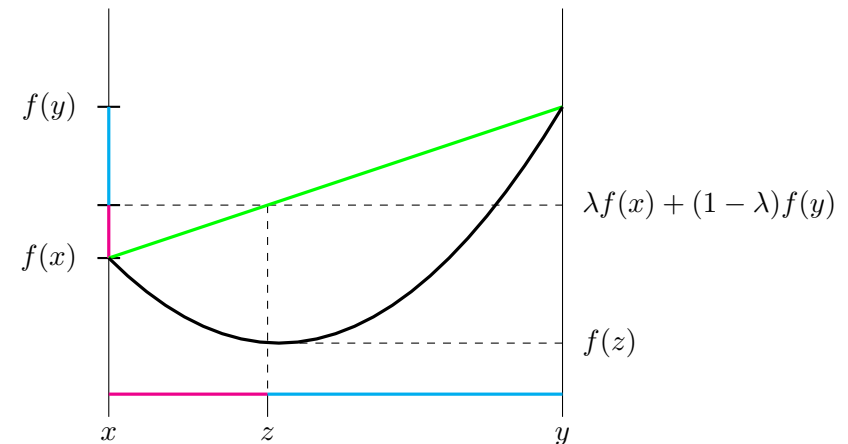
- Ceci se démontre facilement par double inclusion :

( $\subseteq$ ) Si  $z = \lambda u + (1 - \lambda)v$  pour  $\lambda \in [0, 1]$ , alors  $z \geq \lambda u + (1 - \lambda)u = u$  et  $z \leq \lambda v + (1 - \lambda)u = v$ .

( $\supseteq$ ) Si  $z \in [u, v]$ , il suffit de poser  $\lambda = \frac{z - v}{u - v}$ .

#### Interprétation graphique.

- L'inégalité de convexité correspond donc à comparer l'image par  $f$  d'un point de  $[x_1, x_2]$  avec un point de  $[f(x_1), f(x_2)]$ .
- Plus précisément, cette inégalité signifie que si  $A$  et  $B$  sont deux points de la courbe représentative de  $f$  alors l'arc de courbe joignant  $A$  à  $B$  est situé en dessous de la corde de  $f$  joignant  $A$  à  $B$ .



#### Application

La notion de convexité fournit naturellement des inégalités.

Par exemple, la fonction  $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

On en déduit que, sur  $[1, e]$ , elle est située au dessus de sa corde. Ainsi :

$$\forall x \in [1, e], \quad \ln(x) \geq \frac{x - 1}{e - 1}$$

#### Exemple

- Les fonctions constantes sont convexes sur  $\mathbb{R}$ .
- Les fonctions affines  $x \mapsto ax + b$  sont convexes sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $x \mapsto x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 3.** (théorème des 3 pentes)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ .

a)  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in ]x, y[ \end{array} \right\} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

b)  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si :

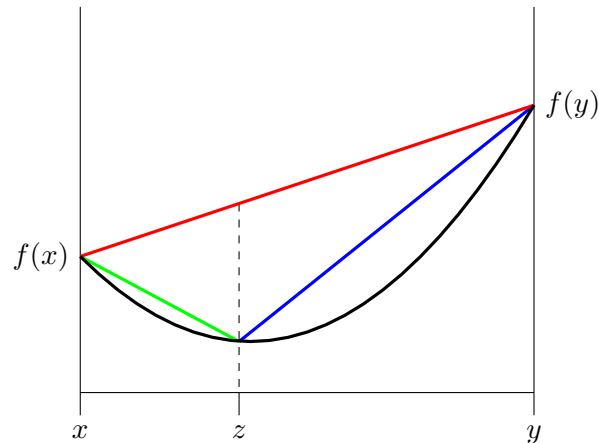
$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in ]x, y[ \end{array} \right\} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

c)  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in ]x, y[ \end{array} \right\} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

**Interprétation graphique.**

Pente verte  $\leq$  pente bleue ; pente verte  $\leq$  pente rouge ;  
pente rouge  $\leq$  pente bleue.



*Démonstration.*

b) Soit  $z \in ]x, y[$ . Alors  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  pour un certain  $\lambda \in ]0, 1[$ .

On peut même être plus précis :  $\lambda = \frac{y - z}{y - x}$  et donc  $1 - \lambda = \frac{z - x}{y - x}$ .

On a alors :  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

autrement dit :  $f(z) \leq \left(1 - \frac{z - x}{y - x}\right) f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y)$ . Et ainsi :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Les autres inégalités s'en déduisent.  $\square$

**Proposition 4.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si **pour tout**  $x_0 \in I$  :

$$\text{la fonction } \tau_{x_0}(f) : \begin{array}{l} I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \text{ est croissante}$$

**Remarque**

L'ensemble de ces caractérisations se traduit pour les fonctions concaves.

a)  $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in ]x, y[ \end{array} \right\} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

b)  $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in ]x, y[ \end{array} \right\} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

c)  $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \forall (x, y) \in I^2 \text{ tels que } x < y \\ \forall z \in ]x, y[ \end{array} \right\} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

## V.2. Convexité et dérivabilité

### Théorème 20.

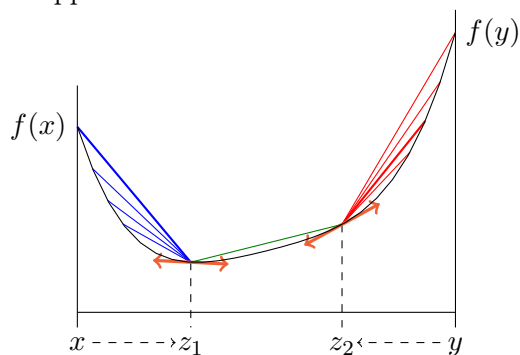
Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $I$ .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I$$

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) Soit  $(z_1, z_2) \in I^2$  tel que  $z_1 \leq z_2$ . Montrons que  $f'(z_1) \leq f'(z_2)$ .

La démonstration s'appuie sur le schéma suivant.



(ce schéma sous-entend que  $z_1$  et  $z_2$  ne sont pas des extrémités de  $I$ ; ce cas devrait être traité séparément)

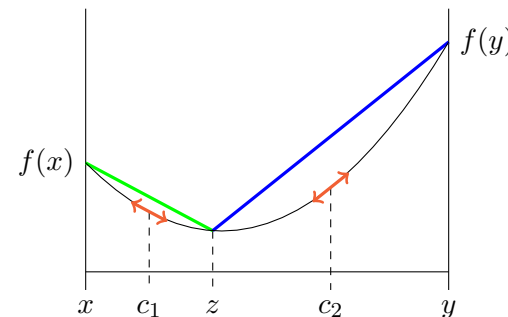
Formalisons ce schéma. Soit  $(x, y) \in I^2$  tel que  $x < z_1$  et  $y > z_2$ .

D'après la proposition 3 (pentes bleues  $\leq$  pente verte  $\leq$  pentes rouges) :

$$\begin{array}{ccc} \frac{f(x) - f(z_1)}{x - z_1} & \leq & \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \leq \frac{f(y) - f(z_2)}{y - z_2} \\ = & & = \\ \tau_{z_1}(f)(x) & & \tau_{z_2}(f)(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f'_g(z_1) & & f'_d(z_2) \end{array}$$

Or, comme  $f$  est dérivable,  $f'_g(z_1) = f'(z_1)$  et  $f'_d(z_2) = f'(z_2)$ .

( $\Leftarrow$ ) On va utiliser l'une des caractérisations de la proposition 3, à savoir le fait que  $f$  est convexe si toute « pente verte » est plus faible que la « pente bleue ». La démonstration s'appuie sur le schéma suivant.



Soit  $(x, y) \in I^2$  et soit  $z \in ]x, y[$ .

- Appliquons le TAF à  $f$  sur  $]x, z[ : \exists c_1 \in ]x, z[, f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ .  
( $f$  est dérivable sur  $I$  donc dérivable sur  $]x, z[$ )
- Appliquons le TAF à  $f$  sur  $]z, y[ : \exists c_2 \in ]z, y[, f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$ .  
( $f$  est dérivable sur  $I$  donc dérivable sur  $]z, y[$ )

Comme  $c_1 \in ]x, z[$  et  $c_2 \in ]z, y[$  on a :  $c_1 < c_2$ .

Or par hypothèse,  $f'$  est croissante donc  $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ .

On en conclut que :  $\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$ . □

### Théorème 21.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $I$ .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow f'' \text{ est positive sur } I$$

*Démonstration.*

Il suffit de se rappeler qu'une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $g'$  est positive. On applique ce résultat à la fonction  $f'$ . □

**Théorème 22.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $I$ .

$$f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{La courbe de } f \text{ est située au-dessus de ses tangentes :} \\ \forall (a, x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a) \end{array}$$

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) On reprend la démonstration du théorème 20 ( $\Rightarrow$ ).

Soit  $(a, x) \in I^2$  tel que  $a \neq x$  (le cas  $x = a$  est trivial).

- Si  $x \geq a$ , en prenant  $z_1 = a$  et  $z_2 = x$ , l'inégalité de gauche fournit :

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si  $x \leq a$ , en prenant  $z_1 = x$  et  $z_2 = a$ , l'inégalité de droite fournit :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq f'(a)$$

D'où l'inégalité souhaitée quelque soit  $(a, x) \in I^2$ .

( $\Leftarrow$ ) Démontrons que  $f'$  est croissante.

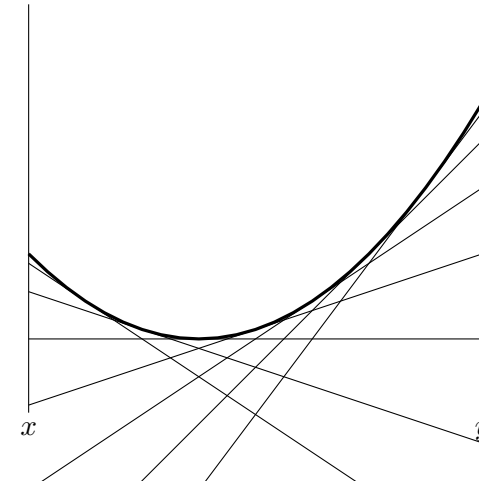
Soit  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$ . Alors, par hypothèse, on a :

$$f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y) \quad \text{et} \quad f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$$

On en déduit que :  $f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$ .

**Application**

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
- $\forall x \in ]0, +\infty[, \ln x \leq x - 1$

**Interprétation graphique.****Remarque**

Encore une fois, il faut traduire ces propriétés dans le cas où la fonction  $f$  est concave. Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . On a alors :

$$f \text{ est concave sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est décroissante sur } I$$

$$\Leftrightarrow f'' \text{ est négative sur } I$$

La courbe de  $f$  est située en dessous de ses tangentes :

$$\forall (a, x) \in I^2, f(x) \leq f(a) + (x - a)f'(a)$$

□



### V.3. Point d'inflexion

#### Définition

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage d'un point  $x_0 \in I$ .

- Le point  $(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion de la courbe représentative de  $f$  si  $f$  change de convexité en ce point.
- Plus précisément, deux cas sont possibles.

$$1) \exists \alpha > 0, \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0], f \text{ est concave} \\ \text{(la courbe de } f \text{ est située en dessous de sa tangente en } x_0) \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], f \text{ est convexe} \\ \text{(la courbe de } f \text{ est située au-dessus de sa tangente en } x_0) \end{cases}$$

$$2) \exists \alpha > 0, \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0], f \text{ est convexe} \\ \text{(la courbe de } f \text{ est située au-dessus de sa tangente en } x_0) \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], f \text{ est concave} \\ \text{(la courbe de } f \text{ est située en dessous de sa tangente en } x_0) \end{cases}$$

- En un tel point  $(x_0, f(x_0))$ , la tangente de  $f$  en  $x_0$  traverse la courbe de  $f$ .

#### Théorème 23.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $I$  et soit  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ .

$(x_0, f(x_0)) \text{ est un point d'inflexion de la courbe de } f \iff f'' \text{ s'annule et change de signe en } x_0$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*Démonstration.*

Dire que  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $x_0$  signifie (par exemple) que :

$$\exists \alpha > 0, \begin{cases} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0], f''(x) \geq 0 \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha], f''(x) \leq 0 \end{cases}$$

Cela signifie donc que  $f$  est convexe sur  $[x_0 - \alpha, x_0]$  ( $f'' \geq 0$  sur cet intervalle) et concave sur  $[x_0, x_0 + \alpha]$  ( $f'' \leq 0$  sur cet intervalle).  $\square$

#### Remarque

Ainsi, si  $(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion alors c'est un extremum local de la fonction  $f'$  (cf théorème 19).