Feuille d'exercices n°14 : Études de fonctions, dérivabilité, convexité

Étude de fonctions

Exercice 1. (★)
Étudier l'ensemble de définition, la continuité puis la dérivabilité des fonctions suivantes. Calculer la dérivée, quand elle existe.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$
b) $f(x) = x\sqrt{2-x}$
c) $f(x) = x\ln x - x$
d) $f(x) = x^{3x}$
e) $f(x) = \ln(3x^2+2x)$
f) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3-x}$
g) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{3x+5}$
h) $f(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$
i) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)+1}$
j) $f(x) = x^x$
k) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x+1)}$
l) $f(x) = x\lfloor x\rfloor$
m) $f(x) = x^{x^x}$
n) $f(x) = x^2 - 2|x|$
o) $f(x) = 3^{4x^2-1}$
p) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-x+3}{2x^3-3x^2+x}$
q) $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)\mathrm{e}^x$
r) $f(x) = \dfrac{2x\sqrt{x}}{x+1}$
s) $f(x) = \sqrt{3x+5-x^2}$
t) $f(x) = x^{\ln x}$
u) $f(x) = \ln(1+|x|)$
v) $f(x) = \sqrt{x^2-x^3}$
w) $f(x) = x\,|x|$
x) $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$
y) $f(x) = \sqrt{x}^x$

Exercice 2. (★)
Étude complète des fonctions suivantes (ensemble de définition, limites, éventuels prolongements par continuité, variations, allure de la courbe) :

a) $f(x) = \sqrt{x+1}\,\ln(x+1)$
b) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$
c) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1)$
d) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-5x-3}$
e) $f(x) = x^{1/x}$
f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2-1}$

Exercice 3. (★)
Calculer l'équation des tangentes en 0, 1, -2 et $\sqrt{3}$ (quand elles existent) des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$
b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$
c) $f(x) = x\ln(x+3)$
d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{e}^x$

Étude de $(f^{-1})'$

Exercice 4. (★★)
On considère la fonction $f : x \to \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser.
c) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.
d) Quel est l'unique antécédent de 0 par f ? En déduire $(f^{-1})'(0)$.
e) Donner une expression générale de $(f^{-1})'$.

Exercice 5. (★★)
On note $f(x) = x\ \mathrm{e}^x$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ? Étudier ses variations.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans I, où I est un intervalle à préciser.

c) On note h la bijection réciproque. Déterminer sa dérivée h'.

d) Faire une étude complète de h (variations, allure de la courbe).

e) Justifier que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = 2x$ admet une unique solution réelle, et exprimer cette solution à l'aide de h.

Développement limité à l'ordre 1 en x_0

Exercice 6. (★★)
Soit f une fonction dérivable en a.

Le but de l'exercice est de déterminer : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(f(a+3h))^2 - (f(a-h))^2}{h}$.

a) On considère la fonction $h : x \mapsto f(a+x)$.
Montrer que la fonction h est dérivable en 0.

b) Écrire le dévelppement limité à l'ordre 1 de la fonction h en 0.
(on utilisera l'écriture avec la fonction $\varepsilon(.)$)

c) En déduire une écriture de $(f(a+x))^2$ pour x au voisinage de 0.

d) Démontrer que : $(f(a+x))^2 = (f(a))^2 + 2\,xf(a)f'(a) + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
Conclure.

Caractère C^n/C^∞

Exercice 7. (☆)

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (★)
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, les éventuels prolongements par continuité, et déterminer la classe la plus fine possible de la fonction (éventuellement prolongée). Donner l'équation des tangentes (si elles existent) aux points qui posent problème.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$

e) $f(x) = x\sqrt{x+x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x - 1}$

Calcul de dérivée $n^{\text{ème}}$

Exercice 9. (★)
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

a) $f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^x$ ***b)*** $g(x) = x^2\,(1+x)^n$ ***c)*** $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Exercice 10. (★)

a) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\dfrac{1}{1-x^2} = a\,\dfrac{1}{1-x} + b\,\dfrac{1}{1+x}$.

b) En déduire la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Théorème de Rolle

Exercice 11. (★)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe un élément $c \in \,]a,b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.
(on pourra introduire la fonction $g : x \mapsto e^x\,(f(x) - f'(x))$)

Théorème des accroissements finis

Exercice 12. ($\bigstar$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \exists c > 0, \quad f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$$

(on pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - f(-x)$)

IAF pour l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 13. ($\bigstar\bigstar$)(d'après *EML* 2001)

On considère la fonction f suivante.

$$f \ : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{e^x - 1} \end{array} \right.$$

a) Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que $\forall x \in \,]0,+\infty[\,, f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$.

c) Étudier les variations de la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0,+\infty[$, par : $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$.
En déduire : $\forall x \in \,]0;+\infty[\,, f''(x) > 0$.

d) En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$).
On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

e) On considère la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

Montrer $\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

f) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$.

g) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \ln 2|$.

h) Établir que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14. ($\bigstar\bigstar$)
Soit la suite la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{array} \right.$

On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a. Montrer que $[0,2]$ est stable par f et que : $\forall x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe dans $[0,2]$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$

e. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

f. Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

g. Écrire un programme Scilab donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

Exercice 15. ($\bigstar\bigstar$)
On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.
On définit la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$, que l'on notera α.

2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

3. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e}}\,|u_n - \alpha|$.

c) Puis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.

d) En déduire enfin que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 16. (★★)

On considère la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4 + \frac{\ln u_n}{4} \end{cases}$

a) Soit $f : x \mapsto 4 + \dfrac{\ln x}{4}$.
Étudier la fonction f et montrer que $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$ est stable par f.

b) Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$. En déduire que f possède un unique point fixe dans cet intervalle.

c) Montrer que pour tout n, u_n existe et appartient à l'intervalle $\left[1, \mathrm{e}^2\right]$.

d) Étudier la monotonie de (u_n) et montrer qu'elle converge vers une limite L à préciser.

e) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, donner une majoration de $|u_n - L|$ en fonction de n.

Démontrer des inégalités à l'aide de tableaux de variations

Exercice 17

1) Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Convexité

Exercice 18. (☆)
Démontrer les inégalités suivantes.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$

b) $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln x \leqslant x - 1$

c) $\forall x \in [1, \mathrm{e}],\ \ln x \geqslant \dfrac{x-1}{\mathrm{e}-1}$

Exercice 19. (☆)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.

Exercice 20. (★)
Étudier les fonctions suivantes, notamment la convexité et la présence de points d'inflexion. On finira en traçant les courbes.

a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

b) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$

d) $f(x) = \dfrac{2\ln x + 3}{x}$

e) $f(x) = -x^2 + 3x - \ln x$

Exercice 21. (★)

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\ln(\ln x)$ est convexe sur $]1, +\infty[$.

b) En déduire que : $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2,\ \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercice 22. (★)

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, 1[$ (0 compris).

b) Déterminer la convexité de f sur $[0, 1[$.

c) Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.

d) Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 23. (★★)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$.
On note $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ et on considère :

$$g : x \mapsto f(x) - M\,\frac{(x-a)(b-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h : x \mapsto f(x) + M\,\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

a) Justifier l'existence de M.

b) Montrer que g est convexe et h est concave.

c) En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a : $|f(x)| \leqslant M\,\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.