CH XV : Intégration sur un segment

I. Définition de l'intégrale sur un segment

Dans cette section, on note a et b deux réels tels que $a < b$. On considère des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

I.1. Aire sous une courbe

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

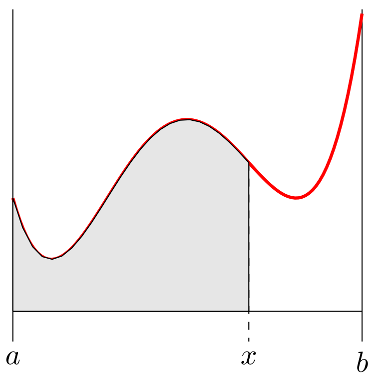
On appelle fonction aire sous la courbe de f et note $\mathcal{A}_f$ la « fonction » :

$$\mathcal{A}_f \ : \left| \begin{array}{ccl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathcal{A}_f(x) = \text{l'aire de la surface délimitée par } \mathscr{C}_f \text{ et l'axe} \\ & & \qquad\qquad \text{des abscisses entre les abscisses } a \text{ et } x. \end{array} \right.$$

Remarque

- Cette définition n'est pas du tout rigoureuse. Vous avez appris, au collège à calculer l'aire de polygones. Mais le problème de la mesure de « l'aire sous une courbe » est autrement plus complexe. Il n'est donc pas clair que cette fonction $\mathcal{A}_f$ existe.
- Cette définition a un avantage : elle permet l'interprétation géométrique et donne une bonne intuition des résultats que l'on va exposer dans ce chapitre.

Représentation graphique.



Aire sous la courbe d'une fonction continue positive

Propriété

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

Alors la fonction $\mathcal{A}_f$ est positive et croissante sur $[a,b]$.

Théorème 1.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

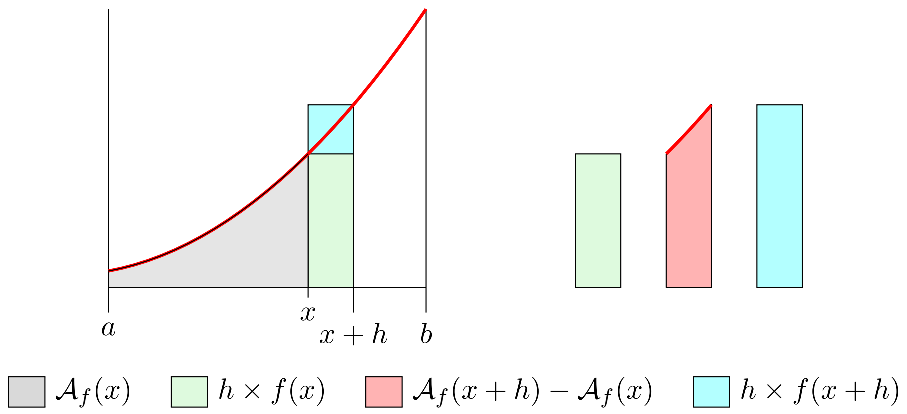
Alors la fonction $\mathcal{A}_f$ est dérivable sur $[a,b]$, et vérifie :

$$\boxed{\mathcal{A}_f'(x) \ = \ f(x)}$$

Démonstration.

On se limite, ici, au cas où la fonction f est monotone, par exemple croissante. Soit $x \in [a,b]$. Afin de montrer que la fonction $\mathcal{A}_f$ est dérivable en x, on doit déterminer la quantité suivante :

$$\lim_{h \to 0} \ \frac{\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)}{h}$$



× Considérons $h > 0$:

- Par définition de $\mathcal{A}_f$, la quantité $\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)$ est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur le segment $[x, x+h]$.
- On peut borner cette quantité par l'aire de deux rectangles, l'un au-dessus et l'un au-dessous de $\mathscr{C}_f$ sur $[x, x+h]$ (cf dessin). Plus précisément, on a :

$$h \times f(x) \leqslant \mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x) \leqslant h \times f(x+h)$$

et donc
$$f(x) \leqslant \frac{\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

- Or $f(x) \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(x+h) \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$.
  Par le théorème d'encadrement, $\mathcal{A}_f$ est dérivable **à droite** en x car :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)}{h} = f(x)$$

× Considérons $h < 0$:
On démontre de même que $\mathcal{A}_f$ est dérivable **à gauche** en x et :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\mathcal{A}_f(x+h) - \mathcal{A}_f(x)}{h} = f(x)$$

Ainsi, $\mathcal{A}_f$ est dérivable en x et on a : $\mathcal{A}'_f(x) = f(x)$. □

I.2. Primitives

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- On appelle **primitive de** f **sur** I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
  a) F est dérivable sur I.
  b) $F' = f$.

Théorème 2.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle.

Démonstration.
Admis. □

Théorème 3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Soit F une primitive de f sur I.

1) $\boxed{G \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + \lambda}$

2) *Soit $c \in I$. Il existe une unique primitive de f sur I s'annulant en c. C'est la fonction $x \mapsto F(x) - F(c)$.*

Démonstration.

1) Si G est une primitive de f sur I alors, par définition, $G' = f = F'$.
On en déduit que : $F' - G' = 0$ et donc $(F - G)' = 0$.
Ainsi, $F - G$ est une fonction constante : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad F - G = \lambda$.

2) Si de plus G s'annule en c, alors $G(c) = F(c) + \lambda = 0$ et donc $\lambda = -F(c)$.

□

Retour à l'intuition

Si f est continue positive, la fonction $\mathcal{A}_f$ (si elle existe !) est une primitive de f sur $[a, b]$. On peut même être plus précis : c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

I.3. Définition de l'intégrale sur un segment

I.3.a) Cas des fonctions continues

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.

Soit F une primitive de f sur I et soit $(a, b) \in I^2$.
(on ne suppose pas ici $a < b$)

- On appelle **intégrale de** a **à** b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\, dt$ la quantité :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt \ = \ [\ F(t)\ ]_a^b \ = \ F(b) - F(a)}$$

Retour à l'intuition

- Si f est continue et positive (et si $\mathcal{A}_f$ existe !), alors $\mathcal{A}_f$ est une primitive de f sur $[a, b]$. Ainsi, on pourra penser l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme l'aire de la surface définie sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b.

Remarque

- La notion d'intégrale sur un segment est indépendante de la primitive choisie. En effet, si F et G sont deux primitives de f, alors pour un $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$F = G + \lambda$$

Ainsi : $F(b) - F(a) \ = \ (G(b) + \lambda) - (G(a) + \lambda) \ = \ G(b) - G(a)$.

- La lettre t de la définition est une variable muette.
On notera donc, sans distinction :

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ ou } \int_a^b f(x)\, dx \text{ ou } \int_a^b f(u)\, du \ldots$$

- Notez que la définition reste valable pour $a \geqslant b$.

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u> sur un intervalle I.

Soit $(a, b) \in I^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. *(on ne suppose pas ici $a < b$)*

1) $\boxed{\int_a^b 0\, dt \ = \ 0}$

2) $\boxed{\int_a^b \lambda\, f(t)\, dt \ = \ \lambda \int_a^b f(t)\, dt}$

3) $\boxed{\int_a^a f(t)\, dt \ = \ 0}$

4) $\boxed{\int_b^a f(t)\, dt \ = \ - \int_a^b f(t)\, dt \ = \ \int_a^b -f(t)\, dt}$

Démonstration.

Soit F une primitive de f sur I. Par définition, $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$.

1) Dans ce cas, $F' = f = 0$ donc la fonction F est constante et $F(b) = F(a)$.

2) $\lambda\, F$ est une primitive de $\lambda\, f$ puisque : $(\lambda\, F)' = \lambda\, F' = \lambda\, f$.
Ainsi, $\displaystyle\int_a^b \lambda\, f(t)\, dt = [\ \lambda\, F\ ]_a^b = \lambda\, F(b) - \lambda\, F(a)$.

3) Dans ce cas, $\int_a^a f(t)\, dt = F(a) - F(a) = 0$.

4) On a : $\displaystyle\int_b^a f(t)\, dt \ = \ F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) \ = \ -\int_a^b f(t)\, dt$ $\square$

Retour à l'intuition

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, la propriété ***2)*** permet d'affirmer que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \ = \ -\int_a^b -f(t)\, dt$.

Par analogie avec cette propriété, on définit l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction **continue** doit être pensée comme une aire orientée :

- × cette aire est positive si f positive.
- × cette aire est négative si f négative.
(et c'est l'opposé de l'aire définie par $-f$, fonction positive)

Exemple

- $\displaystyle\int_3^8 4\ dt = [\ 4t\ ]_3^8 = (4\times 8 - 4\times 3) = 4\times(8-3) = 20$
- $\displaystyle\int_0^1 (2t^2+5t-1)\ dt = \left[\ \frac{2}{3}\ t^3 + \frac{5}{2}\ t^2 - t\ \right]_0^1 = \frac{13}{6}$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\ dt = [\ \ln(t+1)\ ]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1}\ dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\ dt = [\ t - \ln(t+1)\ ]_0^1 = 1 + \ln 2$
- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\ dt = \left[\ \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^t\ \right]_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$
- $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \int_0^1 -\frac{1}{2}\ (-2t\ \mathrm{e}^{-t^2})\ dt = \left[\ -\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-t^2}\ \right]_0^1 = -\frac{1}{2}\ \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)$

Théorème 4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** *sur un intervalle I et $c \in I$.*

$$\boxed{\textit{La fonction} \quad \begin{array}{rcrcl} H & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_c^x f(t)\ dt \end{array} \quad \begin{array}{l} \textit{est la primitive de } f \\ \textit{sur } I \textit{ qui s'annule en } c. \end{array}}$$

1) *En particulier, cette fonction H est de classe C^1 et de dérivée f.*
Ce que l'on pourra noter (avec abus de notation) :

$$\boxed{\left(\int_c^x f(t)\ dt\right)' = f(x)}$$

2) *Si de plus $u, v : J \to I$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle J, alors les fonctions*

$$x \mapsto \int_c^{v(x)} f(t)\ dt, \quad x \mapsto \int_{u(x)}^c f(t)\ dt, \quad x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$$

sont dérivables sur J.

Les dérivées de ces fonctions sont (avec l'abus de notation précédent) :

$$\boxed{\left(\int_c^{v(x)} f(t)\ dt\right)' = v'(x)f(v(x))} \quad \boxed{\left(\int_{u(x)}^c f(t)\ dt\right)' = -u'(x)f(u(x))}$$

$$\boxed{\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt\right)' = v'(x)\times f(v(x)) - u'(x)\times f(u(x))}$$

Démonstration.
Soit F une primitive de f sur I.

1) Par définition, $\displaystyle\int_c^x f(t)\ dt = F(x) - F(c)$.
La fonction $H : x \mapsto F(x) - F(c)$ est dérivable sur I car F l'est.
De plus, on a : $H' = F' = f$.
H est donc bien une primitive de f.
De plus, elle s'annule en c puisque $H(c) = F(c) - F(c) = 0$.

2)
- Remarquons tout d'abord que : $\displaystyle\int_c^{v(x)} f(t)\ dt = H(v(x))$.
  La fonction $H\circ v$ est dérivable sur J car c'est la composée de :
  × v, dérivable sur J.
  De plus, $v(J) \subset I$.
  × H, dérivable sur I.
  Par la formule de dérivation d'une composée, on a :
  $$\forall x\in J, \quad (H\circ v)'(x) = H'(v(x))\times v'(x) = f(v(x))\times v'(x)$$
- De même, $\displaystyle\int_{u(x)}^c f(t)\ dt = -\int_c^{u(x)} f(t)\ dt = -H(u(x))$.
  La fonction $H\circ u$ est dérivable sur J en tant que fonction composée.
  $$\forall x\in J, \quad (H\circ u)'(x) = H'(u(x))\times u'(x) = f(u(x))\times u'(x)$$

3) Utilise la relation de Chasles (*cf* plus loin).
$\displaystyle\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt = \int_{u(x)}^c f(t)\ dt + \int_c^{v(x)} f(t)\ dt \ldots\right)$ □

Exercice. *EDHEC 2016*
Pour chaque entier n on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \ f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} \ dt$$

a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[n, +\infty[$.
La fonction f_n est la primitive, qui s'annule en n de la fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$.
On en déduit que f_n est C^1 sur $[n, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \ f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$$

Ainsi, f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$. □

Exemple
On reprend les calculs précédents. En écrivant ces calculs d'intégrales entre $c \in \mathbb{R}$ et x, on exhibe la primitive de la fonction s'annulant en c.

- $\displaystyle\int_3^x 4 \ dt = [\ 4t\ ]_3^x = 4(x-3)$
- $\displaystyle\int_0^x (2t^2 + 5t - 1) \ dt = \left[\ \frac{2}{3}\ t^3 + \frac{5}{2}\ t^2 - t\ \right]_0^x = \frac{2}{3}\ x^3 + \frac{5}{2}\ x^2 - x$
- $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t+1} \ dt = [\ \ln(t+1)\ ]_0^x = \ln(1+x) \ \ (\text{pour } x > -1)$
- $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{t+1} \ dt = [\ t - \ln(t+1)\ ]_0^x = x + \ln(x+1) \ \ (\text{pour } x > -1)$
- $\displaystyle\int_0^x e^{2t} \ dt = \left[\ \frac{1}{2}\ e^t\ \right]_0^x = \frac{1}{2}(e^x - 1)$
- $\displaystyle\int_0^x te^{-t^2} \ dt = \left[\ -\frac{1}{2}\ e^{-t^2}\ \right]_0^x = -\frac{1}{2}\ \left(e^{-x^2} - 1\right)$

I.3.b) Cas des fonctions continues par morceaux

Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

> *Il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que :*
> - × *f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,*
> - × *f admet une limite à droite finie en a_i,*
> - × *f admet une limite à gauche finie en a_{i+1}.*
>
> *On note alors $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité de f sur $[a_i, a_{i+1}]$.*

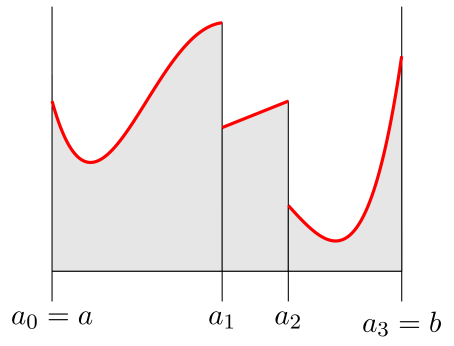
Notons F_i une primitive de $\tilde{f}_i$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.

- On appelle **intégrale de** a **à** b de la fonction f, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t) \ dt$:

$$\boxed{\int_a^b f(t) \ dt \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t) \ dt = \sum_{i=1}^{n} \ (F_i(a_i) - F_i(a_{i-1}))}$$

Idée derrière cette définition.
On calcule l'aire sous la courbe pour chaque « intervalle de continuité » $[a_i, a_{i+1}]$. La quantité $\displaystyle\int_a^b f(t) \ dt$ est obtenue comme somme de ces aires.

Représentation graphique.



II. Propriétés de l'intégrale sur un segment

II.1. Relation de Chasles

Théorème 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I.

Soit $(a,b,c) \in I^3$ (on ne suppose pas ici $a < b$).

Alors on a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt}$$

Démonstration.

Notons F une primitive de f sur I. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ dt\end{aligned}$$

□

II.2. Linéarité de l'intégrale

Théorème 6.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ continues sur I.

Soit $(a,b) \in I^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (on ne suppose pas ici $a < b$).

Alors on a :

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\ dt = \lambda \int_a^b f(t)\ dt + \mu \int_a^b g(t)\ dt}$$

Démonstration.

Soient F une primitive de f et G une primitive de g.

Alors $\lambda F + \mu G$ est dérivable et $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$.

Ainsi, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

$$\begin{aligned}\text{D'où : } \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\ dt &= [\ \lambda F + \mu G\ ]_a^b \\ &= (\lambda F(b) + \mu G(b)) - (\lambda F(a) + \mu G(a)) \\ &= \lambda (F(b) - F(a)) + \mu (G(b) - G(a)) \\ &= \lambda \int_a^b f(t)\ dt + \mu \int_a^b g(t)\ dt\end{aligned}$$

□

Remarque (`POLY` uniquement)

Cette propriété signifie que l'application « intégrale entre a et b d'une fonction continue » (notée ici $\mathrm{Int}_{a,b}$ et définie ci-dessous) est linéaire.

$$\mathrm{Int}_{a,b} \ : \left| \begin{array}{ccc} C([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \end{array}\right.$$

Autrement dit, on a : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (f,g) \in (C([a,b],\mathbb{R}))^2,$

$$\mathrm{Int}_{a,b}(\lambda f + \mu g) = \lambda\ \mathrm{Int}_{a,b}(f) + \mu\ \mathrm{Int}_{a,b}(g)$$

Théorème 7. *(Généralisation au cas de n fonctions)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $(a,b) \in I^2$ (on ne suppose pas ici $a < b$).

Soient $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions <u>continues</u> sur I.

Alors on a :

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right)(t)\ dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(t)\ dt}$$

Remarque (`POLY` uniquement)

Cette propriété signifie la compatibilité de l'application intégrale avec les combinaisons linéaires, ce qui est vérifié pour toute application linéaire.

$$\mathrm{Int}_{a,b}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\ f_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\ \mathrm{Int}_{a,b}(f_i)$$

II.3. Positivité de l'application d'intégration

II.3.a) Énoncé

Théorème 8.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.
Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$.

1) $\boxed{f \geqslant 0 \text{ sur } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0}$

2) $\boxed{f > 0 \text{ sur } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt > 0}$

Démonstration.
Notons F une primitive de f sur I.

1) Supposons $f \geqslant 0$. Alors $F' = f \geqslant 0$ et F est croissante. De plus, comme $a < b$, on a $F(a) \leqslant F(b)$ et donc : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \geqslant 0$.

2) Supposons $f > 0$. Alors $F' = f > 0$ et F est strictement croissante. Et comme $a < b$, on a $F(a) < F(b)$ et donc : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) > 0$. □

Remarque
On peut déduire de ce théorème précédent :

$$\boxed{f \leqslant 0 \text{ sur } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0}$$

En effet, si $f \leqslant 0$, alors $-f \geqslant 0$ et donc, en intégrant sur $[a,b]$ ($b \geqslant a$), $\int_a^b -f(t)\,dt \geqslant 0$, ce qui montre $-\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$ et donc $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$.

Remarque (`POLY` uniquement)
Ce résultat peut se réécrire à l'aide de l'application $\mathrm{Int}_{a,b}$.

$$f \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Int}_{a,b}(f) \geqslant 0$$

Théorème 9. *(zéro de l'application d'intégration)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.
Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0 \\ \bullet \ f \text{ positive sur } [a,b] \\ \quad (\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ est nulle sur } [a,b] \\ (\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0) \end{array}}$$

Démonstration.
Notons F une primitive de f sur I.
On reprend la démonstration du théorème 8.

- Comme $F' = f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, la fonction F est croissante sur $[a,b]$.
  On en déduit que : $F(a) = \min\limits_{[a,b]} F$ et $F(b) = \max\limits_{[a,b]} F$.
- De plus, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = 0$ par hypothèse.
  Ainsi, $\min\limits_{[a,b]} F = F(a) = F(b) = \max\limits_{[a,b]} F$.

On en conclut que F est constante sur $[a,b]$ et que $F' = f = 0$ sur $[a,b]$. □

Remarque
Ainsi, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive sur $[a,b]$ (avec $a < b$).

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est nulle sur } [a,b]}$$

Le sens direct ($\Rightarrow$) est l'énoncé du théorème 9.
La réciproque ($\Leftarrow$) est l'une des propriétés de base de l'intégrale.

II.3.b) Techniques de majoration

Théorème 10.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues sur un intervalle I.

Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$.

Alors :

$$\boxed{f \ \leqslant \ g \text{ sur } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant \ \int_a^b g(t)\ dt}$$

Démonstration.

On applique le théorème précédent à la fonction $g - f \geqslant 0$. En intégrant sur $[a,b]$ $(b \geqslant a)$, on a : $\displaystyle\int_a^b (g-f)(t)\ dt \ \geqslant \ 0$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt \ \geqslant \ \int_a^b f(t)\ dt$. □

Remarque

Cette propriété signifie que $\mathrm{Int}_{a,b}$ est une application croissante.

$$f \ \leqslant \ g \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Int}_{a,b}(f) \ \leqslant \ \mathrm{Int}_{a,b}(g)$$

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}$. Montrer que $J_n \to 0$.

Soit $x \in [0,1]$. Comme : $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ et $x^n \geqslant 0$, on a :

$$0 \ \leqslant \ \frac{x^n}{1+x^2} \ \leqslant \ x^n$$

et donc, en intégrant sur le segment $[0,1]$ $(1 \geqslant 0)$, on obtient :

$$\int_0^1 0\ dx \ \leqslant \ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\ dx \ \leqslant \ \int_0^1 x^n\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

ainsi $$0 \ \leqslant \ J_n \ \leqslant \ \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème d'encadrement, (J_n) est convergente et de limite $\ell = 0$.

Exercice. *EDHEC 2016 (suite)*

Pour chaque entier n on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \ f_n(x) = \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt$$

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration.

b) Soit $t \in [n, +\infty[$. On a alors $t \geqslant n$.

Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$ puis par croissance de la fonction exponentielle, on a : $\mathrm{e}^{\sqrt{t}} \geqslant \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$.

Soit $x \geqslant n$. En intégrant sur le segment $[n, x]$ $(x \geqslant n)$, on obtient :

$$f_n(x) \ = \ \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\ dt \ \geqslant \ \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{n}}\ dt \ = \ (x-n)\ \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x-n)\ \mathrm{e}^{\sqrt{n}} = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) La fonction f_n est :

- × continue sur $[n, +\infty[$,
- × strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[n, +\infty[$ sur $f_n([n, +\infty[)$. Or :

$$f_n([n, +\infty[) = [f_n(n), \lim_{x \to +\infty} f_n(x)[= [0, +\infty[$$

Comme $1 \in [0, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, notée u_n, dans $[n, +\infty[$.

d) D'après la question précédente, $u_n \geqslant n$.

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. □

Théorème 11. *(Inégalité triangulaire)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt}$$

Démonstration.

On doit démontrer que : $\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ dt$, ce qui équivaut à :

$$-\int_a^b |f(t)|\ dt \ \leqslant\ \int_a^b f(t)\ dt \ \leqslant\ \int_a^b |f(t)|\ dt$$

Considérons alorsles fonctions $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$.

- Comme $|f| \geqslant f$ et $|f| \geqslant -f$, les fonctions f^+ et f^- sont positives.
- De plus, $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

Revenons alors à la double inégalité. On commence par remplacer f et $|f|$ par leur valeur en fonction de f^+ et f^-.

(i) L'inégalité de gauche équivaut à :

$$-\int_a^b (f^+(t) + f^-(t))\ dt \ \leqslant\ \int_a^b (f^+(t) - f^-(t))\ dt$$

et à : $$-\int_a^b f^+(t)\ dt - \cancel{\int_a^b f^-(t)\ dt} \ \leqslant\ \int_a^b f^+(t)\ dt - \cancel{\int_a^b f^-(t)\ dt}$$

i.e. : $$0 \ \leqslant\ 2\int_a^b f^+(t)\ dt$$

(ii) De même, l'inégalité de droite équivaut à : $-2\displaystyle\int_a^b f^-(t)\ dt \ \leqslant\ 0$

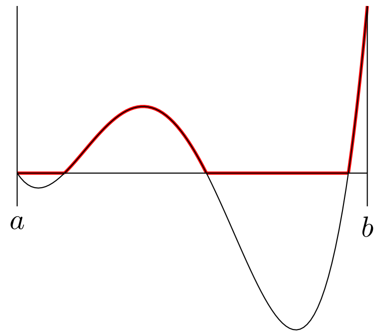
Ces deux inégalités sont vérifiées puisque f^+ et f^- sont positives. □

Remarque

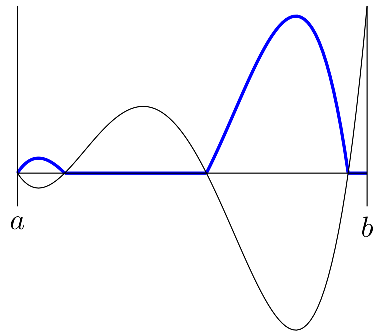
Les fonctions f^+ et f^- sont appelées réciproquement partie positive et partie négative de la fonction f. Notez que ces deux fonctions sont positives.

- $f^+ : x \mapsto \max(f(x), 0) \ = \ \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $f^- : x \mapsto -\min(f(x), 0) \ = \ \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

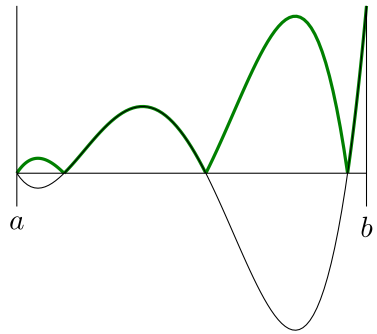
Représentation graphique.



Partie positive de f



Partie négative de f



Valeur absolue de f

Théorème 12.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\boxed{(b-a) \min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant (b-a) \max_{[a,b]} f}$$

Démonstration.
f est continue sur le segment $[a, b]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Ainsi, $\min_{[a,b]} f$ et $\min_{[a,b]} f$ existent bien. Soit $t \in [a, b]$. On a :

$$\min_{[a,b]} f \leqslant f(t) \leqslant \max_{[a,b]} f$$

et donc, en intégrant sur $[a, b]$ ($b \geqslant a$), on obtient :

$$\int_a^b \left(\min_{[a,b]} f\right) dt \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b \left(\max_{[a,b]} f\right) dt$$

ainsi $$(b-a) \min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant (b-a) \max_{[a,b]} f$$ □

Application

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et décroissante sur $[a, b]$, on a :

$$\min_{[a,b]} f = f(b) \quad \text{et} \quad \max_{[a,b]} f = f(a)$$

En reprenant la démonstration précédente, on obtient :

$$f(b) \leqslant f(t) \leqslant f(a)$$

et donc en intégrant sur $[a, b]$ ($b \geqslant a$), on obtient :

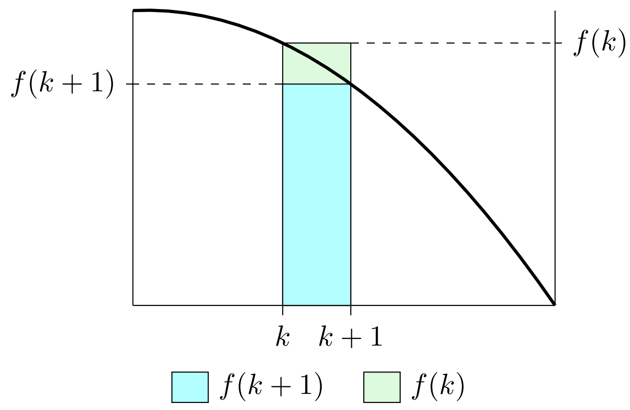
$$\int_a^b f(b)\, dt \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b f(a)\, dt$$

ainsi $$(b-a)\, f(b) \leqslant \int_a^b f(t)\, dt \leqslant (b-a)\, f(a)$$

- Ainsi, si l'on considère un segment de longueur 1, de type $[k, k+1]$ (avec $k \in \mathbb{N}$), on obtient que :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leqslant f(k)$$

On retrouve le schéma (cas décroissant) de la démonstration du théorème 1.



Théorème 13.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt \leqslant (b-a) \max_{[a,b]} |f|}$$

Démonstration.
Combinaison des résultats du théorème 11 et 12 sachant que $x \mapsto |f(x)|$ est conitnue sur $[a, b]$ (comme composée de fonctions continues ...). □

III. Techniques de calcul des intégrales

III.1. Calcul de primitives « à vue »

Principe.
Il s'agit ici de calculer une intégrale en devinant une de ses primitives. Autrement dit, il faut être capable de voir la fonction f à intégrer comme la dérivée d'une autre fonction.

Exemple

- $\displaystyle\int_0^1 5\ dt = \left[\ 5\ t\ \right]_0^1 = 5\left[\ t\ \right]_0^1 = 5\,(1-0) = 5$
- $\displaystyle\int_0^1 t^2\ dt = \left[\ \frac{1}{3}\ t^3\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}\,(1-0) = \frac{1}{3}$
- $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\ dt = \left[\ \frac{2}{3}\ t^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\ t^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1 = \frac{2}{3}\,(1-0) = \frac{2}{3}$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\ dt = \left[\ \ln t\ \right]_1^2 = \ln 2 - \cancel{\ln 1}$
- $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\ dt = \left[\ \mathrm{e}^t\ \right]_0^1 = (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0) = \mathrm{e}^1 - 1$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^3}\ dt &= \int_0^1 t\ (t^2+1)^{-3}\ dt = \left[\ \frac{1}{-2}(t^2+1)^{-2}\ \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ \frac{1}{(t^2+1)^2}\ \right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{8}\end{aligned}$$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\ dt = \int_0^1 t\ (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\ dt = \left[\ (t^2+1)^{\frac{1}{2}}\ \right]_0^1 = \sqrt{2}-\sqrt{1} = \sqrt{2}-1$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)}\ dt = \left[\ \frac{1}{2}\ \ln(|t^2+1|)\ \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ \ln(t^2+1)\ \right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \cancel{\ln 1})$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}\ dt = \left[\ -\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\ \right]_1^2 = -\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{1}}\right) = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$

Primitives classiques.

Fonction	Une primitive
$x \mapsto \lambda$	$x \mapsto \lambda\, x$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\|x\|$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$
$x \mapsto \lambda^x$ (avec $\lambda > 0$)	$x \mapsto \dfrac{\lambda^x}{\ln \lambda}$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln\|u(x)\|$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

III.2. Intégration par parties

Théorème 14.

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I.
Soit $(a,b) \in I^2$.

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt = \left[\ u(t)\ v(t)\ \right]_a^b - \int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt}$$

Ce qu'on peut lire :

$$\boxed{\int_a^b u(t)\ v'(t)\ dt = \left[\ u(t)\ v(t)\ \right]_a^b - \int_a^b u'(t)\ v(t)\ dt}$$

Démonstration.
On a $(uv)' = u'v + uv'$. Ainsi, la fonction uv est une primitive de $u'v + uv'$. Cette dernière fonction est continue par somme/produit de fonctions continues (u $C^1 \Rightarrow u'$ C^0). Elle admet donc une intégrale entre a et b.

$$\int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))\ dt = \left[\ u(t)v(t)\ \right]_a^b$$

On conclut par linéarité de l'intégrale. □

Remarque

- On utilisera l'abréviation IPP.
- Cela permet de déplacer le problème : passer du calcul de $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\ dt$ au calcul de $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\ dt$ (ou inversement).
- Moyen mnémotechnique : $\left| \begin{array}{ll} u = \dots & u' = \dots \\ v' = \dots & v = \dots \end{array} \right.$

Principe.
Effectuer une IPP consiste donc à écrire la fonction dont on doit calculer l'intégrale comme un produit de deux fonctions ($u \times v'$).

× dont l'une sera dérivée ($v \rightsquigarrow v'$),

× et l'autre sera intégrée ($u' \rightsquigarrow u$).

Exemple

- $\displaystyle\int_1^2 \ln t\ dt = \left[\ t \ln t\ \right]_1^2 - \int_1^2 1\ dt = 2\ln 2 - 1$
- $\displaystyle\int_1^2 t^2 \ln t\ dt = \frac{1}{3} \left[\ t^3 \ln t\ \right]_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 t^2\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 t^k \ln t\ dt = \frac{1}{k+1} \left[\ t^{k+1} \ln t\ \right]_1^2 - \frac{1}{k+1} \int_1^2 t^k\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2\ dt = \left[\ (\ln t)^2\ \right]_1^2 - 2 \int_1^2 \ln t\ dt = \dots$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2}\ dt = -\frac{1}{2} \left[\ (t^2+1)^{-1} \ln t\ \right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t(1+t^2)}\ dt$
  Or $\displaystyle\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ donc ...
- $\displaystyle\int_0^1 t^3 \mathrm{e}^{t^2}\ dt = \frac{1}{2} \left[\ t^2 \mathrm{e}^{t^2}\ \right]_0^1 - \int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\ dt = \dots$

À retenir

Il faut s'empresser de dériver la fonction ln : en la dérivant, on tombe sur le calcul de la primitive d'une fonction rationnelle.

Application : calcul d'une primitive de ln.
Soit $x > 0$. Le calcul précédent nous fournit la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

$$\int_1^x \ln t\ dt = \left[\ t \ln t\ \right]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x \ln x - (x-1)$$

III.3. Changement de variable

III.3.a) Calculs d'intégrales par changement de variable

Théorème 15.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit φ une fonction de classe C^1 sur $J = [\alpha, \beta]$ tq $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq I$.

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt}$$

Démonstration.
Soit F une primitive de f sur I. Alors on a $(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \times \varphi'$.
Autrement dit, $F \circ \varphi$ est une primitive de $f \circ \varphi \times \varphi'$.

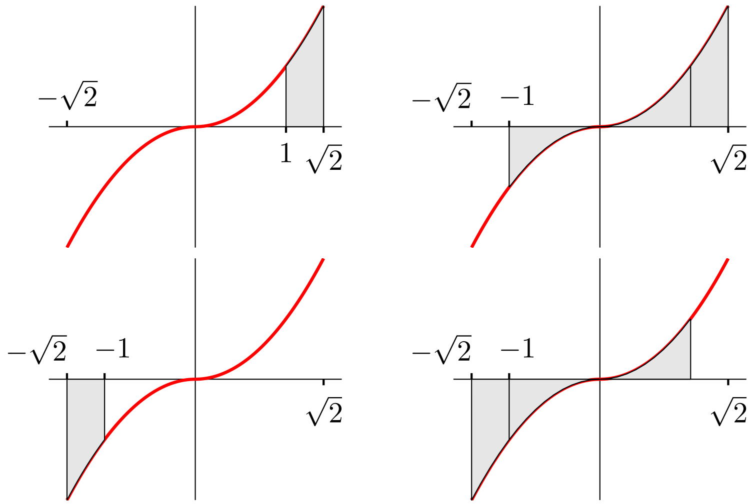
$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt &= \big[\ (F \circ \varphi)(t)\ \big]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= \big[\ F(t)\ \big]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt \end{aligned}$$

□

Aspect théorique (CULTURE)

- On a démontré l'égalité de droite à gauche :
  on part de l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt$ et on aboutit $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt$.
  On peut en effet utiliser cet énoncé dans ce sens. Par exemple :
  $$\int_2^3 \frac{dt}{t\ \ln t} = \int_2^3 \frac{1}{\ln t}\ \frac{1}{t}\ dt = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{t}\ dt = \big[\ \ln|t|\ \big]_{\ln 2}^{\ln 3} = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$$
  avec $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $\varphi : t \mapsto \ln t$.
- Cette utilisation est en fait rarissime. On utilise généralement cet énoncé de la gauche $\left(\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ dt\right)$ vers la droite $\left(\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t)\ \varphi'(t)\ dt\right)$.

- Pour illustrer ce propos, considérons par exemple $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{t}\ dt$.
  Autrement dit, on cherche à déterminer l'intégrale de $f : t \mapsto \sqrt{t}$.
  Appliquons maintenant le théorème précédent avec $\varphi : t \mapsto t^2$.
  $$\left|\begin{array}{l} \varphi(t) = t^2 \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = 2\,t \\ \bullet\ \varphi(\alpha) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha = 1\ \texttt{OU}\ \alpha = -1) \\ \bullet\ \varphi(\beta) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (\beta = \sqrt{2}\ \texttt{OU}\ \beta = -\sqrt{2}) \end{array}\right.$$
  $$(f \circ \varphi)(t) = \sqrt{t^2} = |t|$$
  En appliquant le théorème, on aboutit aux intégrales suivantes :
  $$\int_1^{\sqrt{2}} |t| \times 2t\ dt \qquad \int_{-1}^{\sqrt{2}} |t| \times 2t\ dt \qquad \int_{-1}^{-\sqrt{2}} |t| \times 2t\ dt \qquad \int_1^{-\sqrt{2}} |t| \times 2t\ dt$$
  Laquelle est « la bonne » ? En réalité, elles sont toutes valides.



- Notons que si la fonction $\varphi : I \to J$ choisie pour le changement de variable est une bijection de I sur J, la question précédente ne se pose plus puisque $\varphi(\alpha)$ admet comme un unique antécédent par φ l'élément $\varphi^{-1}(\varphi(\alpha)) = \alpha$.

Aspect pratique

- Si on se réfère au théorème précédent, un changement de variable est la donnée d'une fonction φ.

$\hookrightarrow$ calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\varphi : t \mapsto \ln t$.

$\varphi(t) = \ln t$ et $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t}$
- $\varphi(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = e$
- $\varphi(\beta) = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta = e^2$

Ainsi, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{t+1}\,\frac{1}{t}\,dt$.

On termine ce calcul en remarquant : $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$

- En pratique, les changements de variable seront réalisés à l'aide de la méthode symbolique décrite ci-dessous.

<u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = e^t}$

$u = e^t$

$\hookrightarrow du = e^t\ dt$ et $dt = \dfrac{1}{e^t}\,du = \dfrac{1}{u}\,du$
- $t = 1 \ \Rightarrow \ u = e^1$
- $t = 2 \ \Rightarrow \ u = e^2$

En remplaçant dt par $\dfrac{1}{u}\,du$ et e^t par u, on obtient :

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_{e^1}^{e^2} \frac{1}{u+1}\,\frac{1}{u}\,du$$

ce qui correspond au calcul précédent.

- L'idée du changement de variable est de faire disparaître une partie « gênante » de la quantité $f(t)$. Ainsi, on posera souvent le changement de variable : « $u =$ la racine présente dans l'intégrale ».

<u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$

$u = \sqrt{t}$ (donc $t = u^2$)

$\hookrightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ et $dt = 2\sqrt{t}\,du = 2\,u\,du$
- $t = 1 \ \Rightarrow \ u = \sqrt{1} = 1$
- $t = 2 \ \Rightarrow \ u = \sqrt{2}$

Ainsi : $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+u}\,2u\ du$

Or : $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{u}(u+1)}\,2\cancel{u}\ du = 2\left[\ \ln(|u+1|)\ \right]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

- <u>MÉTHODO</u> : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$ en posant $\boxed{u = \sqrt{1+e^t}}$

$u = \sqrt{1+e^t}$ (donc $e^t = u^2 - 1$)

$\hookrightarrow du = \dfrac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}}\,dt$ et $dt = \dfrac{2\sqrt{1+e^t}}{e^t}\,du = \dfrac{2\,u}{u^2-1}\,du$
- $t = 0 \ \Rightarrow \ u = \sqrt{1+e^0} = \sqrt{2}$
- $t = 1 \ \Rightarrow \ u = \sqrt{1+e}$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{\cancel{u}}\,\frac{2\,\cancel{u}}{u^2-1}\,du$

On termine ce calcul en remarquant que : $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{u-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{u+1}$

- Le programme officiel précise que les « changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices ».
Il faut donc comprendre que le changements de variable affines (ceux du type $\boxed{u = c\,t + d}$) ne seront pas (forcément) précisés.

Exercice

Considérons par exemple : $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2\,t+3}}\ dt$.

Montrer que $I = \displaystyle\frac{1}{4}\int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\ du$ et en déduire la valeur de I.

On effectue le changement de variable $\boxed{u = 2\,t + 3}$

$$\left|\begin{array}{l} u = 2t+3 \quad (\text{donc } 2\,t = u-3) \\ \hookrightarrow du = 2\ dt \quad \text{et} \quad dt = \dfrac{1}{2}\,du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 2\times 0 + 3 = 3 \\ \bullet\ t = 3 \ \Rightarrow\ u = 2\times 3 + 3 = 9 \end{array}\right.$$

Ainsi : $I = \displaystyle\int_3^9 \frac{\frac{1}{2}(u-3)}{\sqrt{u}}\,\frac{1}{2}\ du = \frac{1}{4}\int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\ du$

Or : $\dfrac{u-3}{\sqrt{u}} = \dfrac{u}{\sqrt{u}} - \dfrac{3}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} - \dfrac{3}{\sqrt{u}}$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} 4\ I & = & \displaystyle\int_3^9 \sqrt{u}\ du - 3\int_3^9 \frac{1}{\sqrt{u}}\ du \\ & = & \left[\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_3^9 - 3\left[\dfrac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_3^9 \ = \ \dfrac{2}{3}\left(9\sqrt{9} - 3\sqrt{3}\right) - 6\left(\sqrt{9} - \sqrt{3}\right) \\ & = & \cancel{6\sqrt{9}} - 2\sqrt{3} - \cancel{6\sqrt{9}} + 6\sqrt{3} \ = \ 4\sqrt{3} \end{array}$$

Donc $I \ = \ \sqrt{3}$.

Lien entre le théorème et la méthode symbolique

- La méthode symbolique a évidemment un lien direct avec le théorème initial. Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.
Poser un changement de variable u en fonction de t, revient à écrire :

$$\boxed{u = \varphi^{-1}(t)}$$

Lorsque l'on effectue ce changement de variable, on obtient :

$$\left|\begin{array}{l} u = \varphi^{-1}(t) \quad (\text{donc } t = \varphi(u)) \\ \hookrightarrow du = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}\ dt \quad \text{et} \quad dt = \varphi'(\varphi^{-1}(t))\,du = \varphi'(u)\,du \\ \bullet\ t = a \ \Rightarrow\ u = \varphi^{-1}(a) \\ \bullet\ t = b \ \Rightarrow\ u = \varphi^{-1}(b) \end{array}\right.$$

Ainsi : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\ du$

(par rapport au théorème, $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$)

- L'écriture $\varphi^{-1}(t)$ suppose que la fonction φ réalise une bijection de $[\alpha,\beta]$ sur $\varphi([\alpha,\beta])$. C'est pourquoi le cadre « φ C^1 bijectif » est un cadre considéré comme idéal pour les changements de variable. C'est celui qui sera adopté dans les énoncés.

- Ainsi, le changement de variable $\boxed{u = t^2}$ est problématique.
En effet, pour pouvoir exprimer t en fonction de u (*i.e.* exhiber la fonction φ), il faut que t soit de signe constant sur $[a,b]$. On ne peut donc pas poser un tel changement de variable pour une intégrale entre $a = -1$ et $b = 5$ (sauf à découper cette intégrale comme somme d'une intégrale sur $[-1,0]$ et d'une intégrale sur $[0,5]$).

III.3.b) Changement de variable et parité

Théorème 16.

Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *<u>continue</u> sur* $[-a, a]$.

1) Si f est paire : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_{0}^{a} f(u)\ du}$

2) Si f est impaire : $\boxed{\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0}$

Démonstration.

Par la relation de Chasles, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = \int_{-a}^{0} f(t)\ dt\ +\ \int_{0}^{a} f(t)\ dt$

1) On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad (\text{donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -a \ \Rightarrow\ u = -(-a) = a \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = -0 = 0 \end{array}\right.$$

On obtient ainsi :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = \int_{a}^{0} -f(-u)\ du\ =\ \int_{a}^{0} -f(u)\ du\ =\ \int_{0}^{a} f(u)\ du$$

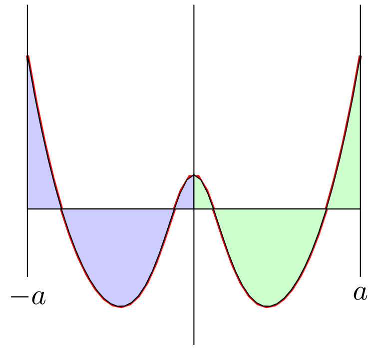
(la deuxième égalité est obtenue par parité de la fonction f)

2) À l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$, on obtient :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\ dt = \int_{a}^{0} -f(-u)\ du\ =\ \int_{a}^{0} f(u)\ du\ =\ -\int_{0}^{a} f(u)\ du$$

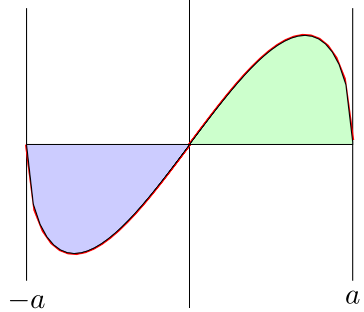
$\square$

Représentation graphique.



Cas d'une fonction paire

$\square + \square = 2\ \square$



Cas d'une fonction impaire

$\square + \square = 0$

Exemple

Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\ \sqrt{4 - x^2}\ dx$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto x\ \sqrt{4 - x^2}$.

- La fonction f est définie et continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
  On peut donc considérer son intégrale sur le segment $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
- Démontrons que f est impaire. Soit $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

$$f(-x)\ =\ -x\ \sqrt{4 - (-x)^2}\ =\ -x\ \sqrt{4 - x^2}\ =\ -f(x)$$

On en conclut, par le théorème précédent, que : $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x\ \sqrt{4 - x^2}\ dx = 0$.

IV. Somme de Riemann, méthode des rectangles

IV.1. Définition

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ une subdivision finie de $[a,b]$.

- On appelle **somme de Riemann** toute somme s'écrivant :

$$\boxed{R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\ f(\xi_k)}$$

où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ξ_k est un élément choisi dans $[x_k, x_{k+1}]$.

Remarque

On considère en particulier des sommes de Riemann définies sur des subdivisions régulières *i.e.* telles que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$.

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = x_k$.

$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = x_{k+1}$.

$$\boxed{T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

- En prenant pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

$$\boxed{M_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

Remarque

Les sommes de Riemann dépendent des paramètres a, b et f. En toute rigueur, il faudrait donc écrire $S_n(a,b,f)$. On se permettra d'alléger cette notation pour ne conserver que S_n en précisant par ailleurs ces paramètres.

IV.2. Méthode des rectangles

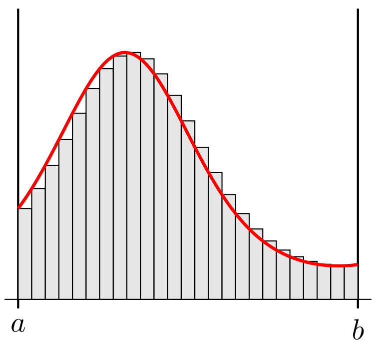
IV.2.a) Définition

Définition

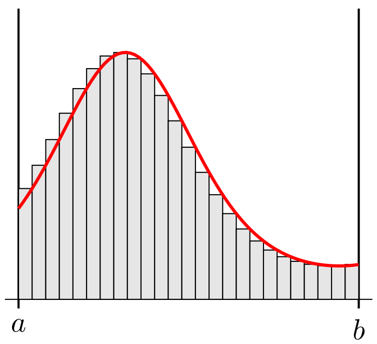
La méthode des rectangles est une méthode d'analyse numérique consistant à approcher le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

- On considère une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
- On approche $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt$ par l'aire d'un rectangle de côté $[x_k, x_{k+1}]$ et s'appuyant sur la courbe $\mathscr{C}_f$.
- On approche alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ par la somme de toutes les aires de rectangles ainsi définis.

Autrement dit, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est approchée par une somme de Riemann.



Somme de Riemann S_n



Somme de Riemann T_n

Découpage avec $n = 25$

IV.2.b) Convergence de la méthode

Théorème 17. *Cas des fonctions continues*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$.

- *Convergence de la somme (S_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt}$$

- *Convergence de la somme (T_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt}$$

- *Convergence de la somme (M_n).*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2k+1}{2}\ \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt}$$

Démonstration.
Admis dans le cas des fonctions continues. □

Cas particulier

- Les exercices sur les sommes de Riemann se traitent en faisant apparaître le cas particulier : $a = 0$, $b = 1$. On a alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

- Illustrons ce procédé par un énoncé classique.
  Démontrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}\right)$ est convergente et calculer sa limite.

L'énoncé du cas particulier nous invite à faire apparaître la quantité $\dfrac{k}{n}$ dans la somme finie. Or on a :

$$n + k = n\left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

Ainsi : $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$.
On en déduit que la suite de l'énoncé est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = \Big[\ \ln(|1+t|)\ \Big]_0^1 = \ln 2 - \cancel{\ln 1}$$

IV.2.c) Vitesse de convergence dans le cas de fonctions C^1 (CULTURE)

Théorème 18.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a,b]$.

Notons $M_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Alors on a : $\boxed{\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt - S_n\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{2n}\ M_1}$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que M_1 est bien défini. En effet, comme f est C^1, f' est continue. Sur le segment $[a,b]$ elle est donc bornée et atteint ses bornes, ce qui démontre l'existence de $M_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Par la relation de Chasles, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt$.

D'autre part, par définition, on a : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\ f(x_k)$.

On remarque de plus que : $(x_{k+1} - x_k)\ f(x_k) = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ dt$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(t)\ dt - S_n \right| \\
= & \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\ dt \right| \\
= & \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| \\
\leqslant & \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| && \text{Inégalité triangulaire sur les réels} \\
\leqslant & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ f(t) - f(x_k)\ |\ dt && \text{Inégalité triangulaire sur les intégrales}
\end{aligned}$$

Or, par le théorème des accroissements finis, on a que :

$$|\ f(t) - f(x_k)\ | \ \leqslant\ M_1\ |\ t - x_k\ |$$

Ainsi : $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ f(t) - f(x_k)\ |\ dt \ \leqslant\ M_1 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ t - x_k\ |\ dt$

Et comme $t \geqslant x_k$ pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\ t - x_k\ |\ dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)\ dt &= \left[\frac{1}{2}\ (t - x_k)^2 \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&= \frac{1}{2}\ (x_{k+1} - x_k)^2
\end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\ dt - S_n \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2}\ (x_{k+1} - x_k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 = \cancel{n}\frac{M_1}{2}\ \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}} = \frac{(b-a)^2}{2n}\ M_1
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque

- Ce théorème est en fait valable pour toute somme de Riemann (notamment (T_n) et (M_n)). La démonstration est similaire à remplacement de x_k par ξ_k près avec :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - \xi_k|\ dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |t - x_k|\ dt$$

- En fait si f est C^2, on a même un théorème plus précis pour (M_n) montrant que la convergence est plus rapide dans ce cas.

$$\boxed{\left| \int_a^b f(t)\ dt - M_n \right| \ \leqslant\ \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|}$$

Application.

Grâce à ce théorème, on peut calculer une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ à ε près par un calcul de S_n.

- Trouver un entier n_0 tel que : $\dfrac{(b-a)^2}{2n_0} M_1 \ \leqslant\ \varepsilon$

  Il suffit de prendre $n_0 = \left\lceil \dfrac{(b-a)^2}{2\varepsilon} M_1 \right\rceil$

- S_{n_0} est alors une approximation à ε près de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$:

$$\left| \int_a^b f(t)\ dt - S_{n_0} \right| \ \leqslant\ \frac{(b-a)^2}{2n_0}\ M_1 \ \leqslant\ \varepsilon$$

$\hookrightarrow$ *cf* TP d'informatique !