Feuille d'exercices n°15 : Intégration sur un segment

Calcul de primitives à vue

Exercice 1. (☆)
Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_2^3 (t^2+t+1)\ dt$

b. $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{1}{1-2t}\ dt$

c. $\displaystyle\int_0^2 \left(2x+1+\frac{3}{2t+3}\right)\ dt$

d. $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \left(5+4\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{2t}\right)\ dt$

e. $\displaystyle\int_1^0 \mathrm{e}^{2t}\ dt$

f. $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{t}{t+1}\ dt$

Exercice 2. (★)
Donner une primitive des fonctions suivantes.
On précisera l'ensemble de définition.

a. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

c. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

e. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f. $f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x)^2$

Exercice 3. (★)
Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\ dx$

b. $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{14}{(4-x)^3}\ dx$

c. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{\ln x}{x}\ dx$

d. $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}^3}^{1/\mathrm{e}^2} \frac{dx}{x\ln x}$

e. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2}\ dx$

f. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\ dx$

g. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$

h. $\displaystyle\int_1^{1/\ln 2} 2^x\ dx$

i. $\displaystyle\int_2^1 \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\ dx$

j. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\ dx$

k. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$

l. $\displaystyle\int_0^1 3\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+1}\ dx$

m. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\ dx$

n. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

o. $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x^3}\ dx$

p. $\displaystyle\int_0^3 (5^x-x+4)\ dx$

q. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 (x-1)\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)\ dx$

Primitives de fonctions rationnelles par DES

Exercice 4. (★★)
Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1}\, dt$

b. $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{t^2-4}\, dt$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+t-2}\, dt$

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\, dt$

e. $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\, dt$

f. $\displaystyle\int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$

g. $\displaystyle\int_0^1 \frac{-6t^2+t+5}{2t+1}\, dt$

h. $\displaystyle\int_1^0 \frac{-3t^2-t+18}{t^2-4}\, dt$

Calcul de primitives par IPP

Exercice 5. (★★)
Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 x\ \mathrm{e}^x\ dx$

b. $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\ dx$

c. $\displaystyle\int_2^3 (\sqrt{x}+\ln x)\ dx$

d. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x-\mathrm{e})\ \ln x\ dx$

e. $\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\ dx$

f. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\ dx$

g. $\displaystyle\int_0^2 (2-x)\ \mathrm{e}^{-x}\ dx$

h. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\mathrm{e}^x\ dx$

i. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\ dx$

j. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\ dx$

Calcul de primitives par changement de variable

Exercice 6. (★★)
Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{e}^x+1}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\mathrm{e}^x\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto \ln u\end{array}\right)$

b. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt{x}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto u^2\end{array}\right)$

c. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto (\ln u)^2\end{array}\right)$

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt{1+\mathrm{e}^x}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto \ln(u^2-1)\end{array}\right)$

e. $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\ dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt{x^3+1}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto (u^2-1)^{\frac{1}{3}}\end{array}\right)$

f. $\displaystyle\int_8^{27} \frac{1}{1+\sqrt{x^3}}\ dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt[3]{x}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto u^3\end{array}\right)$

g. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{Changement de variable : } u=\sqrt{x}\\ \textit{i.e.}\quad \varphi : u\mapsto u^2\end{array}\right)$

Exercice 7. (★★★)
Calculer les intégrales suivantes par changement de variable.
(changement non précisé !)

a. $\displaystyle\int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}}\ dt$

b. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{2t+1}}\ dt$

c. $\displaystyle\int_2^3 \ln(\sqrt[3]{t}-1)\ dt$

d. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$

Primitive de f sous forme intégrale

Exercice 8. (★)
Dériver les fonctions suivantes.

a. $H_1 : x \mapsto \displaystyle\int_3^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$

b. $H_2 : x \mapsto \displaystyle\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

c. $H_3 : x \mapsto \displaystyle\int_x^{n^2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\, dt$ où $n \in \mathbb{N}$

d. $H_4 : x \mapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \mathrm{e}^{5\sqrt{3\ln t}}\, dt$

e. $H_5 : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t+t^2}$

f. $H_6 : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \sqrt{1+u^2}\, du$

g. $H_7 : x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\mathrm{e}^x} \frac{s}{\ln s}\, ds$

Raisonnement par encadrement

Exercice 9. (★★)
On note $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt$.

a. Donner l'ensemble de définition de F, puis donner le signe de F.

b. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$: $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

c. En déduire un encadrement de $F(x)$, pour $x \in [0,+\infty[$.

d. Montrer alors que : $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}x^3$.

e. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 10. (★★)
Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x^2} \int_x^{x+\frac{1}{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\, du$.

Découpage de l'intervalle

Exercice 11. (★)
Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{11}} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}\, dx$

b. $\displaystyle\int_{-2}^{5} \frac{|x+1|}{|x|+1}\, dx$

Relation de récurrence pour $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ par IPP

Exercice 12. (★★)
On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x\, dx$.

a. À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a $I_n = \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} I_{n+1}$.

c. Montrer que : $n\, I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}$.

Exercice 13. (★★)
On note $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x\, dx$.

a. À l'aide d'un raisonnement par encadrement, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

c. En déduire que $\mathrm{e} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Relation de récurrence pour $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ par linéarité de l'intégration

Exercice 14. (★★)
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\ dx$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

4. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1}+u_n = \dfrac{1}{n}$.

5. En déduire une fonction **Scilab** qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. À l'aide de l'inégalité précédente, trouver un équivalent simple de u_n.

Sommes de Riemann

Exercice 15. (★★)
Calculer les limites des suites ci-dessous.

a. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

b. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

c. $w_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n\ n!}\right)^{\frac{1}{n}}$