

CH XVI : Intégrales impropres

I. Définition des intégrales impropres

Définition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

× On dit que l'objet $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est une **intégrale impropre en $+\infty$** .

× On dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **convergente** si la fonction

$$F : \begin{cases} [a, +\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Si c'est le cas, la valeur de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est donnée par :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

× Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ **diverge**.

- Soit $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $] -\infty, b]$.

× On dit que l'objet $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ est une **intégrale impropre en $-\infty$** .

× On dit que $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ **converge** si la fonction

$$F : \begin{cases}]-\infty, b] & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \int_x^b f(t) dt \end{cases}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Si c'est le cas, la valeur de $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ est donnée par :

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt$$

× Dans le cas contraire, on dit que $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ **diverge**.

- Soit $f :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $] -\infty, +\infty[$.

× On dit que l'objet $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est une **intégrale impropre à la fois en $-\infty$ et $+\infty$** .

× On dit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ **converge** lorsqu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^c f(t) dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ sont toutes deux convergentes.

Si c'est le cas, la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt$$

- × Dans le cas contraire, *i.e.* si l'une des intégrales impropres $\int_{-\infty}^c f(t) dt$ ou $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ diverge, on dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ **diverge**.
- L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.
- × Si $x \geq 1$, on a : $\int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x$.
- × Or $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Remarque

- MÉTHODO : étude de l'objet $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.
- × On introduit $\int_a^x f(t) dt$ qui est une intégrale sur le segment $[a, x]$.
(la fonction f est supposée continue sur $[a, +\infty[$ donc est notamment continue sur $[a, x]$)
- × On étudie si $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- Ainsi, les propriétés des intégrales impropres (étudiées dans ce chapitre) sont déduites des propriétés des intégrales sur un segment (étudiées dans le chapitre précédent) à l'aide, lorsqu'il est légitime, d'un passage à la limite.

- L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ converge et vaut 2.
- × Si $x \geq 1$, on a : $\int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t}} = \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^x = -2\frac{1}{\sqrt{x}} + 2$.
- × Comme $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} = 2$.

Penser à faire apparaître les quantités comme des puissances :

$$\frac{1}{t\sqrt{t}} = t^{-\frac{3}{2}}$$

Exemple

- L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} t dt$ diverge.
- × Si $x \geq 1$, on a : $\int_1^x t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.
- × Or $\frac{x^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} 1 dt$ diverge.
- × Si $x \geq 0$, on a : $\int_0^x 1 dt = [t]_0^x = x$.
- × Or $x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et vaut 1.
- × Si $x \geq 1$, on a : $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1$.
- × Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$.
- L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et vaut $\frac{1}{e}$.
- × Si $x \geq 1$, on a : $\int_1^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^x = -e^{-x} + e^{-1}$.
- × Comme $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a : $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{e}$.

Remarque

- Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. Qu'en est-il de $\int_2^{+\infty} f(t) dt$? de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$? ou encore de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ avec $a \in \mathbb{R}$?

Toutes ces intégrales sont convergentes. En effet, d'après la relation de Chasles du chapitre intégration sur un segment, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt$$

et donc

$$\int_a^x f(t) dt = \int_1^x f(t) dt - \int_1^a f(t) dt$$

Par hypothèse, $\int_1^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

On en déduit que $\int_a^x f(t) dt$ admet aussi une limite finie en $+\infty$ et que cette limite vérifie :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt - \int_1^a f(t) dt$$

- Ainsi, la convergence de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ implique la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- La convergence de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ ne dépend donc pas de l'élément c apparaissant dans la définition.

II. Calcul des intégrales impropres

On se pose la question ici de savoir comment utiliser les techniques de calcul du chapitre « Intégration sur un segment » dans le but de :

- × démontrer qu'une intégrale impropre est convergente,
- × la calculer lorsque c'est le cas.

II.1. Primitive à vue : un exemple**Exemple**

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$ est continue (notamment) sur $[0, +\infty[$.

On peut donc considérer la fonction :

$$F : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x f(t) dt \end{cases}$$

primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction f qui s'annule en 0.

On fait apparaître une primitive classique en remarquant que pour tout $t \geq 0$, on a : $f(t) = e^t (1+e^t)^{-2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt &= \int_0^x e^t (1+e^t)^{-2} dt = \left[\frac{(1+e^t)^{-1}}{-1} \right]_0^x \\ &= - \left[(1+e^t)^{-1} \right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^x} \end{aligned}$$

Or : $\frac{1}{1+e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On en conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$ convergente et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt \right) = \frac{1}{2}}$$

II.2. Intégration par parties : un exemple

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3}$ est continue (notamment) sur $[1, +\infty[$.

On peut donc considérer la fonction :

$$F : \begin{cases} [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_1^x f(t) dt \end{cases}$$

primitive sur $[1, +\infty[$ de la fonction f qui s'annule en 1.

On procède alors par IPP pour calculer $F(x)$:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{t} & u' = -\frac{1}{t^2} \\ v' = \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} & v = -e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3} dt &= \left[-\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt \\ &= \left(e^1 - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \right) - \left[-e^{\frac{1}{t}} \right]_1^x \\ &= \left(e^1 - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \right) - \left(e^1 - e^{\frac{1}{x}} \right) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \end{aligned}$$

Or $e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1$. On en conclut que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_1^x \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3} dt \right) = 1$$

II.3. Changement de variable : un exemple

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + 1}$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{e^t + 1}$ est continue (notamment) sur $[0, +\infty[$.

On peut donc considérer la fonction :

$$F : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x f(t) dt \end{cases}$$

primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction f qui s'annule en 0.

Posons le changement de variable $u = e^t$:

$$\begin{cases} u = e^t & \text{donc } du = e^t dt \\ \text{et } dt = \frac{du}{e^t} = \frac{du}{u} \end{cases}$$

- Si $t = 0$ alors $u = e^0 = 1$
- Si $t = x$ alors $u = e^x$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} &= \int_1^{e^x} \frac{du}{u(u+1)} \\ &= \int_1^{e^x} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \int_1^{e^x} \frac{du}{u} - \int_1^{e^x} \frac{du}{u+1} \\ &= [\ln u]_1^{e^x} - [\ln(u+1)]_1^{e^x} = \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) + \ln 2 \end{aligned}$$

Or $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x} \frac{1}{1 + e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} \right) = \ln 2$$

III. Intégrales classiques

Théorème 1.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$1) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

(Critère de Riemann)

$$2) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0$$

Démonstration.

1) Soit $x \geq 1$.

$$\text{Si } \alpha = 1 : \int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x$$

Comme $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

$$\text{Si } \alpha \neq 1 : \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^x = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$$

Enfin si $-\alpha + 1 < 0$ alors $x^{-\alpha+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,

et si $-\alpha + 1 > 0$ alors $x^{-\alpha+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

2) Soit $x \geq 0$.

$$\text{Si } \alpha = 0 : \int_0^x 1 dt = [t]_0^x = x$$

Comme $x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ diverge.

$$\text{Si } \alpha \neq 0 : \int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^x = - \left(\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$$

Enfin si $\alpha > 0$ alors $e^{-\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$,

et si $\alpha < 0$ alors $e^{-\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. □

Remarque

- La démonstration nous permet de connaître la valeur de ces intégrales (lorsqu'elles convergent) :

$$\text{Si } \alpha > 1 \text{ alors } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$\text{Si } \alpha > 0 \text{ alors } \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

- On peut en déduire un résultat similaire pour la convergence des intégrales impropres $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ pour tout $a > 0$.
- Ainsi qu'un résultat pour la convergence de $\int_a^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- La condition importante lorsque l'on change une borne d'un intégrale impropre est de vérifier que la fonction à intégrer reste continue sur le nouvel intervalle d'étude ($[a, +\infty[$ en l'occurrence).

IV. Propriétés des intégrales impropres

On écrira les propriétés suivantes pour les intégrales impropres de type $\int_a^{+\infty} f(t) dt$. **Évidemment on peut écrire des résultats similaires pour les autres cas.**

IV.1. Relation de Chasles

Théorème 2.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

Supposons de plus que : $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Soit $c \in [a, +\infty[$. Alors on a :

1) $\int_c^{+\infty} f(t) dt$ converge.

2) De plus, on a :
$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^{+\infty} f(t) dt$$

Démonstration.

La démonstration a déjà été faite (cf deuxième remarque du chapitre).

Soit $c \geq a$ et $x \geq c$:

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt$$

et donc

$$\int_c^x f(t) dt = \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt$$

Par hypothèse, $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

On en déduit que $\int_c^x f(t) dt$ admet aussi une limite finie en $+\infty$ et que :

$$\int_c^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \quad \square$$

Remarque

L'hypothèse $c \geq a$ est importante. Comme f est continue sur $[a, +\infty[$ et $c \geq a$, alors f est continue sur le segment $[a, c]$. Ceci assure que l'intégrale $\int_a^c f(t) dt$ est bien définie.

IV.2. Linéarité

Théorème 3.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, +\infty[$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Supposons de plus que : $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent.

1) Alors : $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t) dt$ converge.

2) De plus, on a :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt$$

Démonstration.

On se ramène (encore et toujours!) au cas des intégrales sur un segment.

Soit $x \geq a$, alors on a, par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^x (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^x f(t) dt + \mu \int_a^x g(t) dt$$

Comme F et G admettent des limites en $+\infty$, on en déduit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t) dt$ est convergente. Par passage à la limite dans cette égalité, on a de plus :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t) dt \quad \square$$

IV.3. Positivité

Théorème 4.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

Supposons de plus que : $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Et supposons enfin : $\forall x \in [a, +\infty[, f(x) \geq 0$.

$$1) \int_a^{+\infty} f(t) dt \geq 0$$

$$2) f > 0 \text{ sur } [a, +\infty[\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt > 0$$

$$3) \int_a^{+\infty} f(t) dt = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ sur } [a, +\infty[$$

Démonstration.

On se ramène (encore et toujours!) au cas des intégrales sur un segment. Soit $x \geq a$.

1) Par positivité de l'intégrale sur un segment : $F(x) = \int_a^x f(t) dt \geq 0$.

Il suffit alors de passer à la limite dans cette égalité.

2) Si $f \neq 0$, alors $F(x) = \int_a^x f(t) dt > 0$. Le passage à la limite dans cette inégalité ne permet pas de conclure ici (l'inégalité stricte devient large). Il faut donc être plus précis. Soit $c > a$. La relation de Chasles fournit :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \underbrace{\int_a^c f(t) dt}_{> 0} + \underbrace{\int_c^{+\infty} f(t) dt}_{\geq 0}$$

La stricte positivité est une nouvelle fois un résultat du chapitre « Intégration sur un segment ». \square

IV.4. Technique de majoration

Théorème 5.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, +\infty[$.

Supposons de plus que : $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ convergent.

Et supposons enfin : $\forall x \in [a, +\infty[, f(x) \leq g(x)$.

Alors on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt$$

Démonstration.

On se ramène (encore et toujours!) au cas des intégrales sur un segment. Soit $x \geq a$. Alors on a :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt = G(x)$$

Et comme F et G admettent une limite en $+\infty$, on peut passer à la limite dans cette inégalité. \square

IV.5. Convergence absolue

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

- On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Théorème 6.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ est absolument convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ est convergente}$$

Démonstration.

Notons $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \frac{|f| - f}{2}$.

× $f^+ : x \mapsto \max(f(x), 0)$ est la partie positive de f .

× $f^- : x \mapsto -\min(f(x), 0) = \max(-f(x), 0)$ est la partie négative de f .

Supposons $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ absolument convergente.

- On a : $\forall t \geq a, 0 \leq f^+(t) \leq |f(t)|$.

Or $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ est convergente. Donc, d'après le théorème 8, l'intégral impropre $\int_a^{+\infty} f^+(t) dt$ est aussi convergente.

- On a : $\forall t \geq a, 0 \leq f^-(t) \leq |f(t)|$.

Or $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ est convergente. Donc, d'après le théorème 8, l'intégral impropre $\int_a^{+\infty} f^-(t) dt$ est aussi convergente.

Enfin, on a : $f = f^+ - f^-$. On en conclut, par linéarité, que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente. \square

Remarque

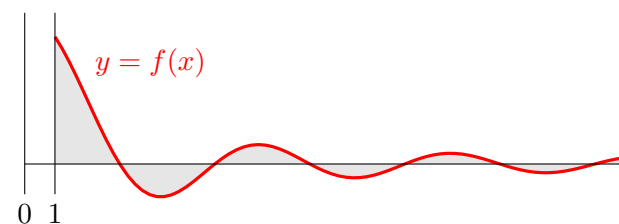
Ce résultat n'est pas une équivalence : il existe des intégrales impropres convergentes mais non absolument convergentes. Dans ce cas, on parle parfois de **semi-convergence**.

- Pour construire un exemple d'intégrale semi-convergente, l'idée est de choisir une fonction successivement positive puis négative de sorte qu'un phénomène de compensation s'opère :

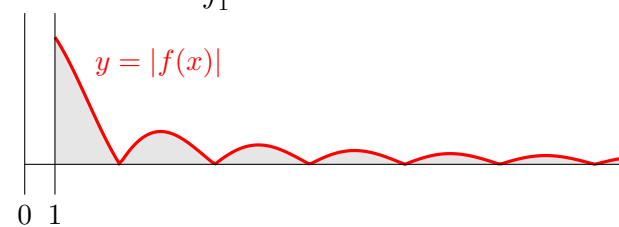
× sur un intervalle où f est positive, l'aire est comptée positivement.

× sur l'intervalle « suivant », f est négative, l'aire est comptée négativement et réduit l'aire précédente.

Représentation graphique d'une intégrale semi-convergente.



L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.



L'intégrale $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ n'est pas convergente.

IV.6. Inégalité triangulaire

Théorème 7.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$.

Supposons de plus que : $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.

1) Alors : $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

$$2) \left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$$

Démonstration.

1) C'est le résultat du théorème 6.

2) On se ramène (encore et toujours !) au cas des intégrales sur un segment.

Soit $x \geq a$. Alors on a :

$$|F(x)| = \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt$$

La quantité de droite converge, par hypothèse, vers $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$.

D'autre part (théorème de composition des limites), on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |F(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right| = \left| \int_a^{+\infty} f(t) dt \right|$$

(on rappelle que F admet une limite finie en $+\infty$ d'après 1))

L'inégalité souhaitée est donc vérifiée par passage à la limite dans l'inégalité précédente. \square

Remarque

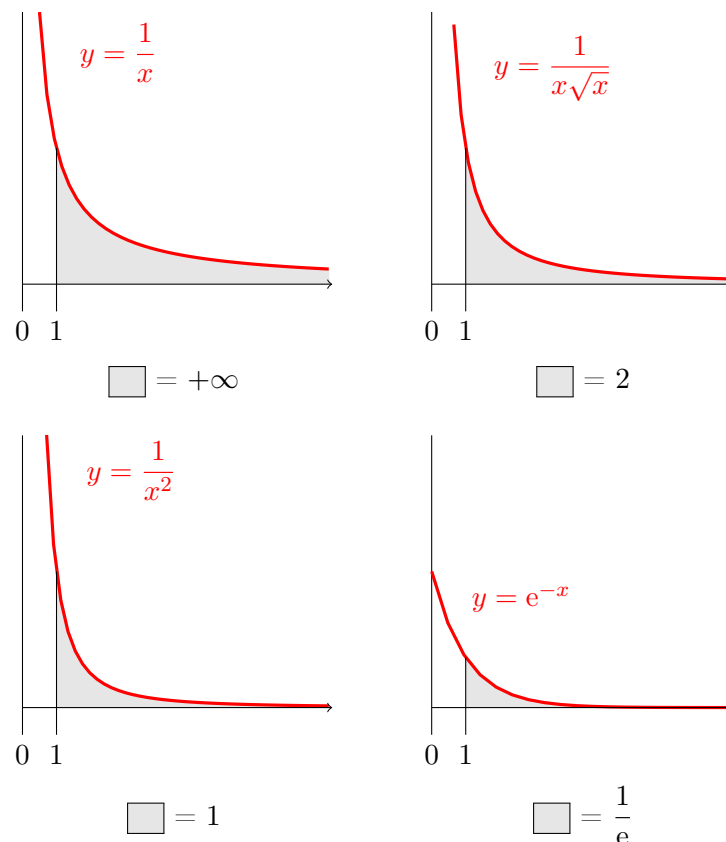
Globalement, on obtient les mêmes propriétés que sur les intégrales sur un segment. Cependant, notez qu'on suppose TOUJOURS de la convergence pour pouvoir écrire ces propriétés dans le cas des intégrales impropres.

V. Le cas des fonctions continues positives

Remarque préliminaire

- L'intérêt des fonctions continues positives a été souligné dans le chapitre « Intégration sur un segment ». Lorsque la fonction f est continue et positive, l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ est l'aire sous la courbe \mathcal{C}_f entre a et x .
- L'aire sous la courbe entre a et $+\infty$ est donc définie comme limite, quand $x \rightarrow +\infty$, de l'aire sous la courbe de \mathcal{C}_f entre a et x .

Représentation graphique des exemples précédents.



Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

Notons $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

Supposons de plus : $\forall x \in [a, +\infty[, f(x) \geq 0$.

$$1) \quad \boxed{\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \Leftrightarrow F \text{ est majorée}}$$

$$2) \quad \text{Si } F \text{ est non majorée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

Démonstration.

$F' = f \geq 0$ donc F est croissante sur $[a, +\infty[$. En vertu du théorème de la limite monotone, F admet donc une limite (finie ou non) en $+\infty$. De plus :

× cette limite est finie si F est majorée.

× cette limite est $+\infty$ si F non majorée. □

Théorème 8.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$.

Supposons de plus : $\forall t \in [a, +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

1) Alors on a :

$$a. \quad \boxed{\int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge}}$$

$$b. \quad \boxed{\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ diverge}}$$

2) De plus, dans le cas de la convergence, on a :

$$\boxed{0 \leq \int_a^{+\infty} f(t) dt \leq \int_a^{+\infty} g(t) dt}$$

Démonstration.

1) Comme $0 \leq f \leq g$, on a (technique de majoration du chapitre précédent) pour tout $x \geq a$:

$$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt$$

$$0 \leq \underset{\parallel}{F(x)} \leq \underset{\parallel}{G(x)}$$

a. Comme $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, la propriété précédente énonce que G est majorée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq a$, $G(x) \leq M$. Et donc, pour tout $x \geq a$, on a :

$$0 \leq F(x) \leq G(x) \leq M$$

La fonction F est elle aussi majorée par M , ce qui démontre que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

b. Dans ce cas, $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et ainsi $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

2) Inégalité obtenue par passage à la limite dans l'inégalité précédente. □

Remarque

• On a démontré précédemment que : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente (et vaut 1).

D'autre part, pour tout $\alpha \geq 2$, on a : $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^2}$.

Ainsi, pour tout $\alpha \geq 2$, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge.

• De même, si $\beta \leq 1$, on a : $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t^\beta}$.

Ainsi, pour tout $\beta \leq 1$, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ diverge.

• On démontre ainsi une partie du théorème sur les intégrales de Riemann.

• On retiendra la méthode : on compare f à des fonctions de référence.

Exercice

Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{t}{t + \sqrt{t}} dt$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$$

$$c) \int_2^{+\infty} t^2 \ln\left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) dt$$

VI. Conclusion

- Ce chapitre a été présenté hors du chapitre « Intégration sur un segment » : les intégrales impropres ne sont pas des intégrales sur un segment !
- Cependant, le lien entre ces deux chapitres est fort puisque les intégrales impropres se définissent à l'aide des intégrales sur un segment.
- Un exercice portant sur les intégrales impropres peut donc **TOUJOURS** se ramener à un exercice sur les intégrales sur un segment !

Remarque

Que dire de l'intégrale : $\int_0^1 \ln t dt$?

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0, 1]$ (pas en 0!). On définit ainsi une intégrale impropre en 0. On pourrait définir de même la convergence de ce type d'intégrales. Mais ce type d'objet n'est pas au programme ...