Feuille d'exercices n°16 : Intégrales impropres

Calcul de la valeur d'intégrales impropres

Exercice 1. (★★)
Déterminer la nature et la valeur (lorsqu'elles convergent !) des intégrales impropres suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\, dt$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}}\, dt$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\, dt$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t+1)\, dt$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt$

f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\ln t\, dt$

g) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dt}{(t-1)(t+2)}$

h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$

j) $\displaystyle\int_2^{+\infty} t^2\, \ln\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)\, dt$

Exercice 2. (★) *(Intégrales de Bertrand)*

a. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{dt}{t\,\ln t}$?

b. Soit $\beta > 1$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}$ est convergente. Calculer sa valeur.

Intégrales impropres et parité

Exercice 3. (★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

1. Supposons f paire.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

2. Supposons maintenant f impaire.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 0$.

Exercice 4. (★★)
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

1. a) Étudier la parité de f.

b) Écrire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 sous forme intégrale.

c) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx$ et calculer sa valeur.

d) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx$.

2. a) Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx = \ln 2$.
(penser à une IPP)

b) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\, dx$.

Relation de récurrence pour $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\ dt$ par IPP

Exercice 5. (★★)
Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et $x \geqslant 0$ on note :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\ dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

1. Soit $x \geqslant 0$.

a) Calculer $I_0(x)$.

b) En déduire que J_0 est une intégrale convergente et calculer sa valeur.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.

2. ***a.*** Déduire des questions précédentes que J_n est convergente.
(on pourra effectuer une récurrence)

b. Quelle relation lie J_{n+1} et J_n ?

c. En déduire la valeur de J_n en fonction de n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par un changement de variable, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-2t}\ dt$ est convergente et calculer sa valeur.