CH XVII : Séries réelles

I. Les séries à termes réels

I.1. Introduction de l'objet série

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum u_n$ la <u>suite</u> $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général S_n est défini par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- La suite (S_n) est appelée **suite des sommes partielles** associée à la série $\sum u_n$. Son terme général S_n est appelé **somme partielle d'ordre** n associée à la série $\sum u_n$.
- On peut aussi considérer des séries dont l'indice initial n'est pas 0. Si $m \in \mathbb{N}$, on notera $\sum\limits_{n\geqslant m} u_n$ pour désigner la série définie par la suite $(T_n)_{n\geqslant m}$ de terme général $T_n = \sum\limits_{k=m}^{n} u_k$.

Exemple

- On s'intéresse à la série $\sum 1$.
  Sa somme partielle d'ordre n est : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
- On s'intéresse à la série $\sum n$.
  Sa somme partielle d'ordre n est : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- On s'intéresse à la série $\sum n^2$.
  Sa somme partielle d'ordre n est : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- On s'intéresse à la série $\sum q^n$.
  Sa somme partielle d'ordre n est : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.
  × si $q = 1$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
  × si $q \neq 1$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

I.2. Nature d'une série

I.2.a) Définition

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.
On considère la série $\sum u_n$.
La suite de ses sommes partielles (S_n) est définie par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **divergente** si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
- Lorsque $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** et est (souvent) notée S. On a alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

- Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Il ne faut pas confondre les notations :

- $\sum u_n$ qui désigne la série de terme général u_n,
- $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ qui est la somme partielle d'ordre n de cette série,
- $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ qui désigne, `SI LA SÉRIE EST CONVERGENTE`, la somme de cette série (limite finie ($\in \mathbb{R}$) de la suite (S_n)).

☞ On n'écrira $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ qu'`APRÈS` avoir prouvé la convergence de $\sum u_n$.

Exemple

- La série $\sum 1$ est divergente.
  $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- La série $\sum n$ est divergente.
  $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- La série $\sum q^n$ est convergente `SSI` $-1 < q < 1$.

  × si $q = 1$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  La série $\sum u_n$ est donc divergente.

  × si $q \neq 1$: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

  Si $-1 < q < 1$, $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-q}$.

  La série $\sum q^n$ est donc convergente de somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

I.2.b) Un lien de convergence entre suites et séries

Théorème 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}}$$

Démonstration.
Notons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Par définition, la série $\sum v_n$ est convergente si sa suite des sommes partielles (S_n) est convergente. Or :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

- Si (S_n) converge, alors (u_{n+1}) converge et donc (u_n) converge.
- Réciproquement, si (u_n) converge, il en est de même de (u_{n+1}) (sous-suite de (u_n)) et donc de (S_n). □

Exemple
Ce théorème est une application de la propriété de télescopage. Cette propriété est fréquente dans les exercices même si elle apparaît parfois cachée.

Considérons par exemple la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Son terme général vérifie :

$$v_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

Ainsi, sa somme partielle d'ordre n est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

I.3. Lien entre u_n et S_n

L'objet u_n, terme général de la série $\sum u_n$ et les quantités S_n, sommes partielles d'ordre n, sont liés par les relations suivantes :

- $\forall n \geqslant 0,\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $u_0 = S_0$
- $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}}$

Remarque

- Cette dernière égalité fait apparaître u_n comme un taux d'accroissement :

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n-(n-1)}$$

  La quantité u_n est donc la vitesse d'accroissement (potentiellement négative) entre les instants $n-1$ et n de la suite (S_n).
- Ce taux d'accroissement du monde discret est à comparer avec le taux d'accroissement du monde continu rencontré dans le chapitre « Dérivation » :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

  dont la limite quand $h \to 0$ définit la quantité $f'(x_0)$ (vitesse instantanée au temps x_0 si f définit un déplacement en fonction du temps).
- Par analogie avec le monde continu, la quantité u_n peut donc être pensée comme la « dérivée discrète » de S_n. La quantité S_n apparaît alors comme la « primitive discrète » de u_n.
- On pourra garder en tête cette analogie entre le symbole $\sum$ qui définit une sommation dans le monde discret et le symbole $\int$ qui définit une sommation dans le monde continu. En conséquence, les propriétés et techniques de ce chapitre seront souvent analogues à celles présentées dans le chapitre « Intégration ».

II. Méthodes pour déterminer la nature d'une série

Étudier la nature d'une série $\sum u_n$ c'est étudier la nature de la suite de ses sommes partielles (S_n).

Il est fortement recommandé d'être au point sur les chapitres « Suites », « Convergence de suites » et « Calculs de sommes ».

II.1. Calcul direct des sommes partielles

Pour déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on peut, dans certains cas, directement expliciter S_n somme partielle d'ordre n associée à $\sum u_n$.

À l'aide de cette technique, on a déjà démontré que :

× $\sum 1$, $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$ sont des séries divergentes.

× $\sum q^n$ est une série divergente si $|q| \geqslant 1$ et convergente si $|q| < 1$.

Remarque

- Cette technique est l'analogue, dans le monde discret, de la technique dite des primitives à vue du chapitre « Intégration ».
- Il existe aussi un théorème de sommation par parties, technique analogue à celle de l'intégration par parties. Ce résultat n'est pas présenté ici car n'a que peu d'intérêt pour la résolution d'exercices.
- L'analogue du principe de changement de variable est le décalage d'indice. Si $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, en posant $j = k+m$, on obtient $S_n = \sum\limits_{j=m}^{n+m} u_{j-m}$.

II.2. Une condition $\boxed{\texttt{NÉCESSAIRE}}$ de convergence

Théorème 2.

Soit (u_n) une suite de réels.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \ \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Pour qu'une série converge, il **faut** *que son terme général tende vers* 0.

Démonstration.
Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Ainsi, la suite (S_n) est convergente vers un réel $S \in \mathbb{R}$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Comme $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, on obtient : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

> Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Autrement dit, on peut trouver une suite (u_n) telle que :
>
> $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \sum u_n \text{ converge}$$

☞ $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ n'est pas convergente.

Théorème 3.

Soit (u_n) une suite de réels.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ diverge}}$$

Pour qu'une série diverge, il **suffit** *que son tg ne tende pas vers* 0.

Démonstration.
C'est la contraposée de l'énoncé précédent. □

Définition

Soit (u_n) une suite de réels.

- On dit que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** si son terme général u_n est tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Remarque

- Le théorème précédent stipule que si une série est grossièrement divergente alors elle est divergente.
- Les séries $\sum 1$, $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$ et $\sum q^n$ avec $|q| \geqslant 1$ sont grossièrement divergentes.
- Cet énoncé permet d'établir une première méthodologie d'étude des séries.

$\boxed{\texttt{MÉTHODO}}$: déterminer la nature d'une série $\sum u_n$.

1) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
Elle est donc divergente.

2) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on ne peut conclure par cet argument !
La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.

III. Propriétés des séries convergentes

III.1. Découpage d'une série convergente

Théorème 4.

On considère une série $\sum u_n$.

1) Alors on a : $\boxed{\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \sum\limits_{n \geqslant m} u_n \text{ converge}}$

2) En cas de <u>*convergence*</u> *on a de plus :*

$$\forall m \geqslant 1, \quad \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{m-1} u_k + \sum_{k=m}^{+\infty} u_k}$$

Démonstration.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geqslant m$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{m-1} u_k + \sum\limits_{k=m}^{n} u_k$ et :

$$\underbrace{\sum_{k=m}^{n} u_k}_{T_n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} - \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} u_k}_{\in \mathbb{R}}$$

La suite (S_n) étant convergente, il en est de même de (T_n). L'égalité entre les sommes des séries est obtenue par passage à la limite (quand $n \to +\infty$) dans l'égalité précédente. □

Remarque

- Ce théorème signifie que la convergence d'une série $\sum u_n$ ne dépend pas des premiers termes de cette série.
- Par contre, le calcul de la somme dépend de l'indice de départ.
- C'est l'analogue de la relation de Chasles sur les intégrales impropres ...

III.2. Linéarité

Théorème 5.

Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries.*

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \sum u_n \text{ converge} \\ \bullet \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum (\lambda u_n + \mu v_n) \text{ converge}}$$

On a alors : $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k}$

2)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \sum u_n \text{ converge} \\ \bullet \sum v_n \text{ diverge} \\ \bullet \mu \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum (\lambda u_n + \mu v_n) \text{ diverge}}$$

3) Si $\sum u_n$ *diverge et* $\sum v_n$ *diverge :*

× *la série* $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ *peut être divergente.*

× *la série* $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ *peut être convergente.*

(à voir au cas par cas)

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a l'égalité suivante sur les sommes finies :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k)}_{V_n} = \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{S_n} + \mu \underbrace{\sum_{k=0}^{n} v_k}_{T_n}$$

1) Si (S_n) et (T_n) convergent, il en est alors de même pour (V_n) par somme de suites convergentes. L'égalité entre sommes des séries est obtenue par passage à la limite $(n \to +\infty)$ dans l'égalité précédente.

2) D'après l'égalité précédente, on a : $T_n = \dfrac{1}{\mu} V_n - \dfrac{\lambda}{\mu} S_n$.

Supposons par l'absurde que $\sum u_n$ converge ((S_n) converge), $\sum v_n$ diverge ((T_n) diverge), et que $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge ((V_n) converge).

D'après l'égalité précédente, T_n apparaît comme somme de V_n et S_n, termes généraux de deux suites convergentes.

On en déduit que (T_n) est convergente ce qui est exclu par hypothèse.

3) Prenons $\lambda = \mu = 1$. Illustrons cet énoncé par deux exemples.

1) Si on choisit :

× $u_n = n$ ($\sum u_n$ diverge)

× $v_n = n$ ($\sum v_n$ diverge)

Alors $u_n + v_n = 2n$ et la série $\sum 2n$ est une série divergente.

2) Si on choisit :

× $u_n = n$ ($\sum u_n$ diverge)

× $v_n = -n$ ($\sum v_n$ diverge)

Alors $u_n + v_n = 0$ et la série $\sum 0$ est une série convergente. □

À retenir.

- La somme de deux séries convergente est convergente.
- La somme de deux séries divergentes peut-être convergente ou divergente.
- On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel $\lambda \neq 0$.
- À l'aide de ce théorème, on a le résultat suivant :

$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow \sum -u_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

Autrement dit : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum -u_n$ converge.
(on en reparlera ...)

IV. Séries usuelles

IV.1. Séries géométriques et ses dérivées

Théorème 6.

Soit $q \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\sum q^n \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

2) $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} n\, q^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

3) $\boxed{\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)\, q^{n-2} \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

De plus, si $|q| < 1$, on obtient les sommes suivantes.

a. $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}}$ **b.** $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}}$

c. $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, q^{k-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}}$

Démonstration.

1) Si $q = 1$, on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$.

× Si $|q| < 1$, on a $q^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (S_n) converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

× Si $q \geqslant 1$, on a $q^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

× Si $q \leqslant -1$, la suite (q^{n+1}) n'admet pas de limite, donc (S_n) diverge.

On considère la fonction $f_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$. C'est une fonction polynomiale et elle est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $x \neq 1$, cette fonction peut s'écrire sous la forme :

$$f_n(x) \;=\; \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

2) Si $x \neq 1$, on a : $f_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\ x^{k-1}$.

De par l'autre expression de f_n, on a aussi :

$$f_n'(x) = \frac{-(n+1)\ x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)\ x^n + n\ x^{n+1}+1}{(1-x)^2}$$

De plus, si $|x| < 1$, on a $(n+1)\ x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n\ x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la série $\sum n\ x^{n-1}$ est donc convergente (x fixé).

Au final, pour tout q tel que $|q| < 1$, on a :

$$f_n'(q) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k\ q^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} k\ q^{k-1} \;=\; \frac{1}{(1-q)^2}$$

3) Soit $x \neq 1$. On raisonne de même. La dérivée de f_n' peut s'écrire :

$$f_n''(x) = \frac{-(n+1)n\ x^{n-1}+2(n+1)(n-1)\ x^n + n(1-n)\ x^{n+1}+2}{(1-x)^3}$$

Pour tout q tel que $|q| < 1$, on a :

$$f_n''(q) \;=\; \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\ q^{k-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^{k-2} \;=\; \frac{2}{(1-q)^3} \qquad \square$$

Remarque

- Les séries de la forme $\sum q^n$ sont appelées séries géométriques.
- Les séries de la forme $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ q^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n(n-1)\ q^{n-2}$ sont appelées séries géométriques dérivées.
- Les formules précédentes de sommes restent valables avec une initialisation à $n = 0$ puisque les termes ajoutés sont nuls.
- On aurait pu calculer la dérivée $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$ …

Application

Dans les exercices, il faudra savoir reconnaître les séries géométriques et géométriques dérivées et savoir calculer leur somme.

1) Montrer que $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$ est convergente et calculer sa somme.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \dfrac{n}{3^{2n+1}} = n \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1} = \dfrac{1}{3}\ n \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right)^n$.

On a donc : $S_n \;=\; \dfrac{1}{3} \sum\limits_{k=0}^{n} k \left(\dfrac{1}{9}\right)^k \;=\; \dfrac{1}{27} \sum\limits_{k=0}^{n} k \left(\dfrac{1}{9}\right)^{k-1}$

C'est la somme partielle d'une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{1}{9} < 1$.

Ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{27}\ \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^2} \;=\; \dfrac{1}{3\times \cancel{9}}\ \dfrac{9^{\cancel{2}}}{8^2} \;=\; \dfrac{3}{64}$.

2) Montrer que $\sum \frac{n^2}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = n^2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

En écrivant : $n^2 = n(n-1)+n$, on obtient :

$$u_n \;=\; n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n \;=\; \frac{1}{4}\ n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\ n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On a donc : $S_n \;=\; \dfrac{1}{4} \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{n} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée et la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde toute deux de raison $\dfrac{1}{2} < 1$.

Ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}\ \dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \;=\; \dfrac{2^4}{4} + \dfrac{2^2}{2} \;=\; 4 + 2 \;=\; 6$

IV.2. Séries de Riemann

Théorème 7.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

Démonstration.

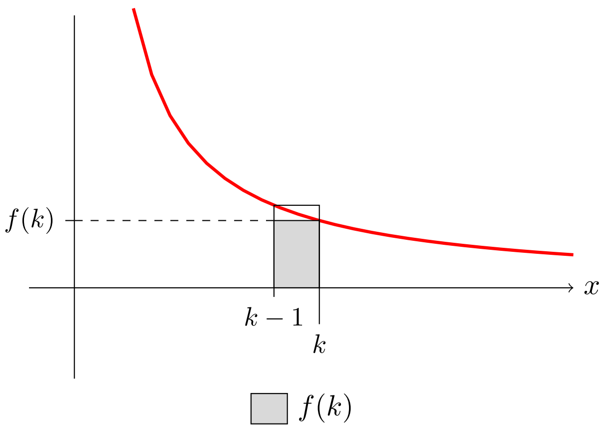
- Si $\alpha \leqslant 1$
  - $\times$ Cas $\alpha = 1$: la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.
  - $\times$ Cas $\alpha < 1$: pour tout $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$.

    Or, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

    Donc, par le critère de comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$

  On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

  Comme $\alpha \geqslant 0$, f est décroissante.



Pour tout $k \geqslant 2$, on a : $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$.

On en déduit que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{n} f(k)}_{= S_n - 1} \leqslant \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt}_{= \int_1^n f(t)\, dt}$$

Ainsi :

$$S_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\, dt = 1 + \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

On en déduit que : $S_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

La suite (S_n) est :

- $\times$ croissante puisque $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs.
- $\times$ majorée par $1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

Elle est donc convergente. Ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. □

Remarque

- Il faut savoir reconnaître ce type de séries dans les exercices. Par exemple :
  - $\times$ les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ sont convergentes.
  - $\times$ les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont divergentes.

IV.3. Série exponentielle

Théorème 8.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ *converge et :* $\boxed{e^x \ = \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}}$

Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$

Démonstration.
Admis. □

Un mot sur ce type d'objets (`CULTURE`)

- L'écriture $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un polynôme de degré ∞.
- On appelle cet objet une **série entière** et on dit alors que la fonction exponentielle est développable en série entière (DSE). Toutes les fonctions ne sont pas développables en séries entières. L'intérêt de ce type de développement est la relative simplicité de l'objet $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et notamment son bon comportement vis à vis de certaines opérations telles que la dérivation.
- Ce type d'objet n'est au programme ni en première ni en deuxième année.

Remarque
Comme précisé, nous n'étudierons pas les outils pour montrer la convergence de la série exponentielle. Cependant nous pouvons quand même vérifier que cette série n'est pas grossièrement divergente :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad u_n \ = \ \frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(on peut notamment le montrer à l'aide du critère de d'Alembert)

Application
Dans les exercices, il faudra savoir reconnaître la série exponentielle et calculer la somme associée.

- Montrer que $\sum \dfrac{n+7}{2^n \ n!}$ est convergente est calculer sa somme.

  Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \dfrac{n+7}{2^n \ n!} = \dfrac{n \ (\frac{1}{2})^n}{n!} \ + \ 7 \ \dfrac{(\frac{1}{2})^n}{n!}$.

  On a donc : $S_n \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k \ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ + \ 7 \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\frac{1}{2})^k}{k!}$.

  × Tout d'abord, remarquons que :
  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{k \ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{k \ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ = \ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!}$$
  $$= \ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

  × D'autre part, on a : $7 \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\frac{1}{2})^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 7 \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

  On en conclut que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{15}{2} \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \dfrac{15}{2} \ \sqrt{\mathrm{e}}$.

V. Séries à termes positifs

V.1. Les résultats fondamentaux

Théorème 9.

Soit $\sum u_n$ *une série et* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite des sommes partielles associée.*

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0) \quad \Leftrightarrow \quad (S_n) \text{ est croissante}}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, (S_n) est croissante.

($\Leftarrow$) Supposons (S_n) croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n = S_n - S_{n-1} \geqslant 0$. □

Remarque

- Ce résultat est à comparer à celui du chapitre précédent qui énonce :
$$f \geqslant 0 \ \Rightarrow\ F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est croissante}$$
- On a aussi démontré dans le chapitre « Intégrales impropres » :
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow\ F \text{ est majorée}$$

Le résultat analogue s'énonce comme suit.

Théorème 10.

Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

1) $\boxed{\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow (S_n) \text{ est majorée.}}$

2) $\boxed{(S_n) \text{ non majorée } \Rightarrow S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

Démonstration.
C'est une conséquence du théorème de convergence monotone !
La suite (S_n) est croissante.

- Si elle est de plus majorée, elle est convergente.
Réciproquement, si (S_n) converge, elle est majorée.
- Si elle est non majorée, elle tend vers $+\infty$. □

V.2. Critère de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 11.

Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs.*

Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

Alors *1)* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow$ $\sum u_n$ *converge*

2) $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow$ $\sum v_n$ *diverge*

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$, on en déduit :

- $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = T_n$,
- (S_n) et (T_n) sont croissantes puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs.

1) Si $\sum v_n$ converge, alors (T_n) est majorée.
Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \leqslant M$. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant T_n \leqslant M$$
ce qui signifie que (S_n) est majorée par M. De plus, (S_n) est croissante.
Elle est donc convergente. On en conclut que $\sum u_n$ converge.

2) Si $\sum u_n$ diverge, la suite croissante (S_n) est non majorée.
On en déduit que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \geqslant S_n$.
On en déduit que : $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Remarque

- La conclusion reste valable avec l'hypothèse moins stricte suivante :

$$\forall n \geqslant m,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

(la convergence d'une série, comme on le verra par la suite, ne dépend pas de ses premiers termes)

- Ce résultat est analogue à la Proposition **1** du chapitre « Intégrales impropres » portant sur les fonctions continues et positives.
- Ce théorème est important. Il signifie que pour déterminer la nature d'une série à termes positifs, il suffit de la comparer à des séries de référence (dont on connaît la nature).

Application : exercices

1) On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et on souhaite montrer qu'elle est divergente.

- On remarque tout d'abord que :

$$\forall x \geqslant 0,\ 0 \ \leqslant\ \ln(1+x) \ \leqslant\ x$$

L'inégalité de droite est une inégalité de convexité. En effet, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave. Sa courbe est donc située en dessous de ses tangentes, notamment sa tangente en 0 : $y = f'(0)\ (x-0)+f(0) = x$

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$:
  - est à termes positifs,
  - son terme général vérifie : $\forall n \geqslant 1,\ 0 \ \leqslant\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \ \leqslant\ \frac{1}{n}$,
  - la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

  $\hookrightarrow$ on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

2) Montrons maintenant que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

- C'est une série à termes positifs.
- On a, pour tout $n \geqslant 2$: $\frac{1}{n^2} \ \leqslant\ \frac{1}{n(n-1)}$.
  Pour pouvoir conclure par le théorème précédent il faudrait connaître la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$.
- Remarquons que : $\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k(k-1)} \ =\ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. On a donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \ =\ \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \ =\ 1 - \frac{1}{n} \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ 1$$

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$:
  - est à termes positifs,
  - son terme général vérifie : $\forall n \geqslant 2,\ 0 \ \leqslant\ \frac{1}{n^2} \ \leqslant\ \frac{1}{n(n-1)}$,
  - la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.

  $\hookrightarrow$ on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

  Il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

3) On peut enfin s'intéresser aux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \geqslant 2$, on a : $\forall n \geqslant 1,\ 0 \ \leqslant\ \frac{1}{n^\alpha} \ \leqslant\ \frac{1}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
- Si $\alpha \leqslant 1$, on a : $\forall n \geqslant 1,\ 0 \ \leqslant\ \frac{1}{n} \ \leqslant\ \frac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

En fait, on a un résultat plus précis : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\ \Leftrightarrow\ \alpha > 1$.

V.3. Application : critères d'équivalence et de négligeabilité

Théorème 12.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs.

Supposons qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Plus précisément, on a :

1) $\sum u_n$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ *converge*

2) $\sum u_n$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ *diverge*

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, on a : $0 < m\, v_n \leqslant u_n \leqslant M\, v_n$.
Par le théorème 11, on en déduit que :

1) $\sum M\, v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum m\, v_n$ converge,

2) $\sum m\, v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum M\, v_n$ diverge.

Il suffit alors de remarquer que les séries $\sum m\, v_n$, $\sum M\, v_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature puisque $\sum\limits_{k=0}^{n} M\, v_k = M \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. □

Remarque

- La conclusion reste valable avec l'hypothèse moins stricte suivante :

$$\forall n \geqslant m,\ 0 < m \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant M$$

- On peut de même relâcher l'hypothèse de stricte positivité en prenant (u_n) et (v_n) suites de termes positifs telles (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Théorème 13. *(Critère d'équivalence - critère de négligeabilité)*

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs.

1) $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\ (\geqslant 0) \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}}$

2) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ u_n \geqslant 0,\ v_n \geqslant 0 \\ \bullet\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ \bullet\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$

Démonstration.

1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant m,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon.$

Par exemple, si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant m,\ 0 < \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$$

2) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant m,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \varepsilon.$

Par exemple, si $\varepsilon = 1$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant m,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant 1$

Autrement dit : $\forall n \geqslant m,\ \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. □

Remarque

- Encore une fois, on peut relâcher l'hypothèse de stricte positivité en prenant (u_n) et (v_n) suites de termes positifs telles (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Application : exercices

1) Retour sur la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

On peut rédiger comme suit :

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ $(\geqslant 0)$
- On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sont de même nature.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

2) Retour la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

On peut rédiger comme suit :

- $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\,(n-1)}$ $(\geqslant 0)$
- On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(n-1)}$ sont de même nature.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,(n-1)}$ est convergente (*cf* démo précédente) donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

3) Retour la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 2$.

On peut rédiger comme suit :

- $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$
- $\frac{1}{n^\alpha} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Remarque

- Ainsi, pour étudier une série $\sum u_n$ à termes négatifs, il suffit d'étudier la série $\sum -u_n$ qui est à termes positifs.
- On aurait donc pu énoncer les Théorèmes 11, 12, 13 sur des séries à termes négatifs. En fait, l'hypothèse adéquate pour ces théorèmes est celle des séries à termes de signe constant.
- Notons que certaines séries ne sont pas à termes de signe constant.
Un exemple particulier est celui des séries dont les termes sont de signes alternés (comme par exemple $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$). Il existe un résultat de convergence spécifique à ce type de séries nommées **séries alternées** (*cf* TD).

VI. Notion de convergence absolue

Définition

Soit $\sum u_n$ une série.

- La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 14. *(Inégalité triangulaire)*

Soient $\sum u_n$ une série.

1) $\boxed{\sum u_n \text{ est absolument convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente}}$

2) Dans le cas de la convergence, on a de plus : $\boxed{\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_k|}$

Démonstration.

1) On introduit (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$$v_n = \frac{u_n + |u_n|}{2} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

v_n est la partie positive de u_n et w_n est la partie négative de u_n.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant v_n \leqslant |u_n|$.
  - × Par hypothèse, $|u_n|$ est le terme général d'une suite convergente.
  - × Ainsi, par le théorème 11, la série $\sum v_n$ est convergente.
- De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant w_n \leqslant |u_n|$.
  - × Par hypothèse, $|u_n|$ est le terme général d'une suite convergente.
  - × Ainsi, par le théorème 11, la série $\sum w_n$ est convergente.

Enfin, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - w_n$. La série $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes. Elle est donc convergente.

2) Par inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ étant supposées convergentes, on obtient le résultat souhaité par passage à la limite dans cette inégalité. □

Remarque

- Ce résultat ainsi que sa démonstration sont analogues au résultat d'inégalité triangulaire énoncé dans le chapitre « Intégrales impropres ».
- La notion d'absolue convergence n'est pas équivalente à la notion de convergence. Plus précisément : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. On parle alors parfois de série **semi-convergente** pour désigner une série convergente mais non absolument convergente.
  ↪ on verra un exemple en TD

Un point sur le BO.

La notion de convergence absolue pour les séries n'est pas développée en première année. Pour citer le programme officiel, « cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète » (cf chapitre à venir sur les probabilités).

VII. Résumé des séries rencontrées

u_n	Nature de $\sum u_n$
n^3	$\sum n^3$ diverge
n^2	$\sum n^2$ diverge
n	$\sum n$ diverge
1	$\sum 1$ diverge
$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge
$\frac{1}{n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge
$\frac{1}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge
$\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 2$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge

Remarque

Comme on le verra par la suite : $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1}$

MÉTHODO **Étude de séries**

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1) <u>Étude de la limite de u_n</u>

a) si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

b) si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.

La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.
(une étude plus précise doit être réalisée)

2) <u>Si $\sum u_n$ est à termes positifs</u> ($\sum u_n$ à termes de signe constant)

On dispose des trois outils suivants.

a) Critère de comparaison.

b) Critère d'équivalence.

c) Critère de négligeabilité.

3) <u>Si $\sum u_n$ « quelconque »</u>

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Démontrer de la convergence absolue (techniques du ***2)*** utilisables)

× Si $\sum |u_n|$ est convergente (*i.e.* $\sum u_n$ absolument convergente)
alors $\sum u_n$ est convergente.

× Si $\sum |u_n|$ est divergente
alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.
(une étude plus précise doit être réalisée)

b) On revient à la définition : la série $\sum u_n$ est convergente si la suite (S_n) est convergente. On peut calculer S_n :

× en reconnaissant des séries usuelles (série géométrique et ses dérivées, série exponentielle).

× en reconnaissant une somme télescopique.