# Feuille d'exercices n°17 : Séries

## Nature d'une série

**Exercice 1.** (★★)
Étudier la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

***a.*** $\sum \dfrac{1}{n^2 - n}$

***b.*** $\sum \dfrac{1}{e^n + e^{-n}}$

***c.*** $\sum \dfrac{1}{n^4 - 3^n}$

***d.*** $\sum \ln\left(\dfrac{n^2 + n^4}{2n^4}\right)$

***e.*** $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$

***f.*** $\sum \dfrac{\ln n}{2^n}$

***g.*** $\sum \dfrac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$

***h.*** $\sum \left(\dfrac{5n+1}{6n+2}\right)^n$

## Calcul de sommes par télescopage

**Exercice 2.** (☆) (COURS)

***a.*** Montrer que pour $k > 0$ : $0 \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.

***b.*** En déduire une minoration de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ puis la nature de $\sum \dfrac{1}{k}$.

**Exercice 3.** (★)
On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

***a.*** Quelle est la nature de cette série ?

***b.*** Calculer sa somme.
$\left(\textit{on pourra mettre } u_n \textit{ sous la forme } \ u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n+3}\right)$

**Exercice 4.** (★)
Calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{4n^2 - 1}$ *(cf exercice précédent)*.

**Exercice 5.** (★)
On considère la suite $(a_n)$ est définie par : $\begin{cases} \bullet \ a_0 > 0 \\ \bullet \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n}\, a_n \end{cases}$

***a.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.

***b.*** Quelle est la nature de la suite $(a_n)$ ?

***c.*** Montrer que la suite $(a_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

***d.*** On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de $a_n$.

***e.*** En déduire la nature de $\sum a_n$.

**Exercice 6.** (★★)
On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} \bullet \ u_0 \in [0,1] \\ \bullet \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

***a.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

***b.*** Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?

***c.*** Montrer que la suite $(u_n)$ converge et donner sa limite.

***d.*** Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.

***e.*** Prouver que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

***f.*** En déduire la nature de $\sum u_n$.

## Calcul de sommes par linéarité

**Exercice 7.** (★)
On admet que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

## Calcul de sommes à vue (sommes usuelles)

**Exercice 8.** (★)
Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes (on pourra discuter selon la valeur de $x$, dans les questions où un $x$ intervient).

***a.*** $\sum \frac{7}{2^{2n-5}}$

***b.*** $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

***c.*** $\sum \frac{n}{2^n}$

***d.*** $\sum n^2 x^n$

***e.*** $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$

***f.*** $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$

***g.*** $\sum \frac{4n^2+5n}{5^n}$

***h.*** $\sum \frac{n-1}{3^n}$

***i.*** $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$

***j.*** $\sum \frac{3(-2)^n}{n!}$

***k.*** $\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

***l.*** $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$

***m.*** $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$

***n.*** $\sum \frac{n^2 8^n}{n!}$

## Séries à termes de signe constant

**Exercice 9.** (☆) *(Séries à termes négatifs)*
Soit $(u_n)$ une suite à termes négatifs : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0$.
On considère la série $\sum u_n$ et $(S_n)$ la suite des sommes partielles associées.

***a.*** Déterminer la monotonie de $(S_n)$.

On considère maintenant une suite $(v_n)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n \leqslant 0$.

***b.*** Montrer que : $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

***c.*** Montrer que : $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

**Exercice 10.** (★)

***a.*** Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$.

***b.*** On considère $(x_n)$ une suite de réels positifs tel que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que : $\sum x_n$ converge $\Rightarrow \sum x_n^2$ converge.

## Reste d'une série

**Exercice 11.** (★)
On considère $\sum u_n$ une <u>série convergente</u>.
On appelle **reste d'ordre** $n$ de la série $\sum u_n$ et on note $R_n$ la quantité :

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$$

***a.*** Cette quantité est-elle bien définie ?

***b.*** Écrire la quantité $R_n$ en fonction de $S$, somme de la série $\sum u_n$ et de $S_n$, somme partielle d'ordre $n$ de la série $\sum u_n$.

***c.*** En déduire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

## Sujet de concours

**Exercice 12.** (★★) (d'après EDHEC 1998)
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On appelle $(u_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} \bullet \quad u_0 = 1 \\ \bullet \quad n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

***a.*** Étudier la fonction $f$ et dresser son tableau de variations.

***b.*** Montrer que $(u_n)$ est strictement positive et strictement décroissante.

***c.*** En déduire que $(u_n)$ est convergente et donner sa limite.
On pose pour tout entier $n$ :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$$

***d.*** Montrer que $v_n$ est strictement négatif.

***e.*** Montrer que la suite $(v_n)$ est convergente de limite nulle.

***f.*** Simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$.

***g.*** En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra que :

$$\forall x \in [0,1],\ -x^2 \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} - 1 \leqslant -\frac{x^2}{4} \leqslant 0$$

***h.*** En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

***i.*** En utilisant le résultat de l'exercice 10, déterminer la nature de $\sum u_n$.

## Critère des séries alternées

**Exercice 13.** (★★)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant 0$,
- $(u_n)$ est décroissante,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\sum (-1)^n\, u_n$ est convergente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\, u_k$.

***a.*** Montrer que les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.

***b.*** En déduire que la série $\sum (-1)^n\, u_n$ est convergente. On note $S$ sa somme.

***c.*** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.

***d.*** Montrer que $S$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant u_{n+1}$.
*(on pourra traiter séparément le cas n pair et le cas n impair)*

**Application :**

***d.*** Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ ?
Donner un majorant de son reste d'indice $n$.

***e.*** La série précédente est-elle absolument convergente ?

## Comparaison séries intégrales

**Exercice 14.** (★★)

Soit $\alpha > 1$. On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$.

***a.*** Montrer que la fonction $f$ est décroissante.

***b.*** Montrer que : $\forall k \geqslant 1, \ f(k+1) \ \leqslant \ \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ dt \ \leqslant \ f(k)$.

Faire apparaître sur une même représentation graphique ces quantités.

***c.*** Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \ \leqslant \ \int_1^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

***d.*** En déduire que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ sont de même nature.

***e.*** Calculer $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\ dt$.

En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ et de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

***f.*** En conclure que : $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\ \Leftrightarrow\ \alpha \ > \ 1$.

## Sommation par parties

**Exercice 15.** (★★)

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $S_n \ = \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_n$ en fonction de termes de la suite $(S_n)$.
*(distinguer le cas $n = 0$ et $n \geqslant 1$)*

***b.*** Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_k \ = \ S_n\, v_n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(S_n \times (v_{k+1} - v_k)\right)$.

Commenter alors le titre de cet exercice.

***c.*** Démontrer la propriété suivante.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (S_n) \text{ bornée} \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant 0 \\ \bullet\ (v_n) \text{ décroissante et } v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \sum u_n v_n \text{ est convergente}$$

***d.*** Justifier la convergence des séries : $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}\ n}{3^n}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.