# CH XVIII : Espaces probabilisés - cas général

Au premier semestre, nous avons fait l'étude de la notion de probabilité sur un univers $\Omega$ fini. Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre au cas où l'univers est infini (chapitre à bien connaître !). C'est l'occasion de revoir les notions du premier semestre.

## I. Espaces probabilisables - cas général

### I.1. Expérience aléatoire

**Définition**
On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat ne peut être prédit de manière certaine. Autrement dit, une expérience dont le résultat dépend du hasard.

Illustrons cette notion d'expérience aléatoire sur différents exemples et profitons-en pour rappeler une partie du vocabulaire des probabilités.

**Exemple**

*1)* Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.

- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  *Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.*
- Exemple d'événement $A$ : « le résultat obtenu est pair ».
  *Événement : propriété de l'expérience qui peut être vérifiée ou non.*
  $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$
- Notons $\omega$ le résultat de l'expérience.
  *On dira que l'événement $A$ est réalisé si le résultat de l'expérience vérifie l'événement. Autrement dit, si : $\omega \in A$.*
  *Ici, l'événement $A$ est notamment réalisé si l'expérience donne pour résultat $\omega = 6$.*
- Exemple d'événement : $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  *Cet événement est réalisé si le résultat de l'expérience $\omega \in B$ i.e. si $\omega = 1$ (la face haute du dé est 1) ou $\omega = 2$, ou $\omega = 3$, ..., ou $\omega = 6$.*
  *Cet événement est appelé évenement certain.*
- Exemple d'événement $C$ : « le résultat du lancer est plus grand que 7 ».
  *Cet événement, jamais réalisé est appelé événement impossible : $C = \varnothing$.*

**Remarque**
Ce premier exemple illustre le cas où l'ensemble des résultats possibles $\Omega$ est fini. C'est un cas particulier. On peut en effet définir des expériences dont l'ensemble des résultats est infini.

*2)* Expérience : on joue à pile ou face de façon répétée et on s'intéresse au rang d'apparition du premier pile.

- Univers : $\Omega = \mathbb{N}^*$.
  *L'univers est l'ensemble des rangs possibles. A priori, tous les rangs sont possibles !*
- Exemple d'événement $D$ : le premier pile est obtenu avant ou lors du $10^{\text{ème}}$ lancer. On a alors $D = [\![1, 10]\!]$.
  L'expérience est notamment réalisée pour $\omega = 3$.
- Exemple d'événement $E$ : le premier pile est obtenu après le $10^{\text{ème}}$ lancer. $E = \bar{D} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \geqslant 11\}$.

**Remarque**
Ce nouvel exemple illustre le cas où l'ensemble des résultats possibles $\Omega$ est non fini et dénombrable. Il existe aussi des expériences où $\Omega$ est non fini et non dénombrable.

**Parenthèse : notion d'ensemble dénombrable / fini.**

**Définition**

Un ensemble $E$ est :

***a)*** **fini** : si $E = \varnothing$ ou s'il existe une bijection entre $E$ et $[\![1, n]\!]$.

***b)*** **infini** : si $E$ n'est pas fini.

***c)*** **dénombrable** : s'il exite une bijection entre $E$ et $\mathbb{N}$.

***d)*** **au plus dénombrable** : s'il est fini ou dénombrable.
Dans le cas contraire, on dit qu'il est non dénombrable.

*3)* Expérience : on observe la durée de vie d'une ampoule.

- Univers : $\Omega = \mathbb{R}^+$.
  *L'univers est l'ensemble des durées possibles. A priori, toutes les durées sont possibles même si la modélisation $\Omega = [0, T]$ avec $T$ suffisamment grand semble cohérente.*

*4)* Expérience : on lance indéfiniment un dé 6 et on considère la suite des résultats obtenus.

- Univers : $\Omega = [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}^*}$, ensemble des suites à valeur dans $[\![1, 6]\!]$.
- Considérons l'événement $F_i$ : « on obtient 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
  *L'ensemble $F_i \subseteq [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}^*}$ est un ensemble de suites : il est constitué de toutes les suites dont le $i^{\text{ème}}$ élément est 6 (pas de contrainte sur les autres éléments).*
- Notons $G$ l'événement : « on obtient (au moins une fois) 6 lors des 10 premiers lancers ».
  *Cet événement signifie que 6 est obtenu soit lors du $1^{er}$ lancer, soit lors du $2^{\text{ème}}$, ..., soit lors du $10^{\text{ème}}$ lancer.*
  *Il s'écrit :* $G = \bigcup\limits_{i=1}^{10} F_i$
- Considérons $H$ : « on obtient 6 (au moins une fois) lors de la partie ».
  *Cet événement signifie que 6 est obtenu soit lors du $1^{er}$ lancer, soit lors du $2^{\text{ème}}$, ...*
  *On peut l'écrire :* $F = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} F_i$
- De même, on peut considérer l'événement : $S = \bigcap\limits_{i=1}^{4} F_i$
  *Cet événement est constitué de l'ensemble des suites dont les 4 premiers éléments sont 6.*
- Et enfin l'événement : $T = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}^*} F_i$
  *Cet événement est constitué de l'ensemble des suites dont les tous éléments sont 6 : il est donc réduit à la suite constante de valeur 6.*

**Remarque**

Lorsque l'on considère des univers $\Omega$ non finis on constate les points suivants.

- L'ensemble des événements d'intérêt peut être infini.
  *(Rappel : si $\Omega$ fini (de cardinal $n$) alors $\mathcal{P}(\Omega)$ fini (de cardinal $2^n$) )*
- Un événement peut être défini comme une union infinie d'événements.
- Un événement peut être défini comme intersection infinie d'événements.

**Définition**

Soit $\Omega$ un ensemble. Notons $I$ une partie de $\mathbb{N}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$).

Notons $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ ($\forall i \in I,\ A_i \subseteq \Omega$).

***a)*** On note $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ l'ensemble défini par : $\omega \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ \omega \in A_i$

Autrement dit : $\boxed{\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I,\ \omega \in A_i\}}$

L'événement $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est réalisé si l'un des événements $A_i$ est réalisé.

***b)*** On note $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ l'ensemble défini par : $\omega \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ \omega \in A_i$

Autrement dit : $\boxed{\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I,\ \omega \in A_i\}}$

L'événement $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est réalisé si tous les événements $A_i$ est réalisé.

***c)*** Lorsque $I = \mathbb{N}$, on notera : $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$ et $\bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.

## I.2. Notion de tribu

### Définition

Soit $\Omega$ un ensemble.

*a)* On appelle **tribu** (ou $\sigma$-**algèbre**) de parties de $\Omega$ tout ensemble $\mathscr{A}$ constitué de parties de $\Omega$ (autrement dit $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) tel que :

- ***(i)*** $\Omega \in \mathscr{A}$.
- ***(ii)*** $\forall A \in \mathscr{A},\ \bar{A} \in \mathscr{A}$.
  *(stabilité par passage au complémentaire)*
- ***(iii)*** Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ on a : $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \ \in\ \mathscr{A}$.
  *(stabilité par union dénombrable)*

*b)* $(\Omega, \mathscr{A})$ est alors appelé **espace probabilisable**.

*c)* Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés **événements**.

### Exemple

- Si $\Omega \neq \varnothing$, $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu, parfois appelée tribu grossière.
  Cette tribu contient seulement deux événements : l'événement impossible et l'événement certain.
- Si $\Omega \neq \varnothing$, $A \subseteq \Omega$, $A \neq \varnothing$ et $A \neq \Omega$, alors $\{\varnothing, \Omega, A, \bar{A}\}$ est une tribu sur $\Omega$. C'est la plus petite tribu qui contient $A$.
- Notons $\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ fini ou } \bar{A} \text{ fini}\}$. Ce n'est pas une tribu.
  × si $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{2n\}$ est un élément de $\mathscr{A}$,
  × ainsi, si $\mathscr{A}$ est une tribu alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un élément de $\mathscr{A}$.
  Ce n'est pas le cas car ni $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (ensemble des entiers pairs) ni son complémentaire (ensemble des entiers impairs) ne sont de cardinal fini.

### Comparaison avec la notion d'espace probabilisable dans le cas fini.

La notion de tribu doit être considérée comme notre nouveau modèle d'ensemble regroupant les événements.

- Dans le cas où $\Omega$ est fini, on choisissait toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ (*cf* chapitre premier semestre) : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ espace probabilisable.
- Dans le cas où $\Omega$ est infini, $\mathcal{P}(\Omega)$ est encore une tribu (elle contient **tous** les événements que l'on peut définir sur $\Omega$) donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est bien un espace probabilisable.
- Mais alors pourquoi ne pas prendre toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ qui regroupe tous les événements que l'on peut former sur $\Omega$ ?

En fait, si $\Omega = \mathbb{R}$ (infini non dénombrable) le choix de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ comme espace probabilisable a peu de sens. Le but d'un espace probabilisable est d'accueillir une fonction de probabilité qui en fait un espace probabilisé. On peut démontrer (largement hors de notre portée) que l'on ne peut définir de probabilité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tout entier : on ne peut mesurer la probabilité de certaines parties de $\mathbb{R}$.

☞ L'idée est donc de définir un ensemble d'événements plus restreint sur lequel on pourra définir une probabilité. Cela revient à sélectionner les événements que l'on souhaite observer.

### Exemple

On considère de nouveau l'expérience consistant à observer la durée de vie d'une ampoule.

- $\Omega = \mathbb{R}^+$.
- On peut choisir comme tribu celle engendrée par tous les intervalles de la forme $]a, +\infty[$. On pourra notamment observer si la durée de vie de l'ampoule est strictement supérieur à un temps de référence. Mais aussi si elle est plus petite qu'un temps donné (passage au complémentaire) ou encore si elle est comprise entre deux temps distincts.
  *(en fait cette tribu contient (notamment) tous les intervalles de $\mathbb{R}^+$)*

**Propriété**
Soit $\mathscr{A}$ une tribu de parties de $\Omega$.

***1)*** $\varnothing \in \mathscr{A}$.

***2)*** Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on a :

$$\boxed{A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}.}$$

***3)*** Si $I \subseteq \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$, on a :

$$\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i \ \text{ et } \ \bigcap_{i \in I} A_i \ \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}.}$$

*Démonstration.*

***1)*** $\Omega \in \mathscr{A}$ et $\varnothing = \bar{\Omega}$ donc $\varnothing \in \mathscr{A}$.

***2)*** Si $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on considère la suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

× $C_0 = A$,

× $C_1 = B$,

× et $C_k = \varnothing$ pour tout $k \geqslant 2$.

On a alors : $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} C_i = A \cup B \ \in \ \mathscr{A}$.

On en déduit que $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \ \in \ \mathscr{A}$ car $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont dans $\mathscr{A}$.

***3)*** Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$ on considère la suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

× $C_i = A_i$ si $i \in I$,

× et $C_i = \varnothing$ pour tout $i \notin I$.

On a alors : $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} C_i = \bigcup\limits_{i \in I} A_i \ \in \ \mathscr{A}$.

On en déduit que $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} \bar{A}_i} \ \in \ \mathscr{A}$ car tous les $\bar{A}_i$ sont dans $\mathscr{A}$. □

**Remarque** : suite ou famille d'événements ?

- On peut remplacer la propriété ***(iii)*** de la définition par :
  ***(iii')*** Pour tout $I \subseteq \mathbb{N}$ et toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements de $\mathscr{A}$ on a :
  $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \ \in \ \mathscr{A}$ *(stabilité par union au plus dénombrable)*
- L'intérêt de la propriété ***(iii)*** est pédagogique : en écrivant $+\infty$, il apparaît plus clairement qu'on peut considérer une union infinie d'événements.
- L'intérêt de la propriété ***(iii')*** est qu'elle englobe le cas $I$ fini : on obtient directement que l'union finie d'événements est un événement (avec la ***(iii)*** on doit le démontrer).

**Résumé des propriétés de stabilité.**
Une tribu $\mathscr{A}$ de parties de $\Omega$ :

× contient l'événement impossible et l'événément certain,

× est stable par union finie et stable par union dénombrable,

× est stable par intersection finie et stable par intersection dénombrable,

× est stable par passage au complémentaire.

Ainsi, si $\mathscr{A}$ est une tribu, on pourra toujours considérer l'événément obtenu par une union au plus dénombrable d'événements de $\mathscr{A}$, par une intersection au plus dénombrable d'événements de $\mathscr{A}$, ou encore comme complémentaire d'un événement de $\mathscr{A}$. Tous ces événements sont dans $\mathscr{A}$.

**Exemple**

- $\{\varnothing, \{1\}, \{1,3\}, \{3\}, \{2,4,5\}, \{1,2,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ est une tribu de parties de $\Omega = [\![1,5]\!]$.
- Si $\Omega = [\![1,5]\!]$, alors $S = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ n'est pas une tribu car (l'une de ces propriétés suffit) :
  × ne contient pas $\varnothing$,
  × n'est pas stable par union puisque $\{1,2\} \in S$ et $\{1,3\} \in S$ mais que $\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \notin S$,
  × n'est pas stable par intersection puisque $\{1,2\} \in S$ et $\{1,3\} \in S$ mais que $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \notin S$,
  × ...

- On s'intéresse parfois à la plus petite tribu contenant un ensemble $S$ de parties de $\Omega$ (on parle alors de tribu engendrée par l'ensemble $S$).
  Par exemple, si on souhaite construire la plus petite tribu de $\Omega = [\![1, 5]\!]$ contenant $S = \{\{1,2\},\{1,3\},\{4\},\{5\},\{1,2,3,4,5\}\}$, on peut procéder comme suit. On part de $S$. Étant données les propriétés des tribus, on doit ajouter :
  × $\varnothing$,
  × $\overline{\{1,2\}} = \{3,4,5\}$,
  × $\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\}$,
  × $\ldots$
  On peut démontrer que l'on construit ainsi $\mathcal{P}(\Omega)$.

### I.3. Système complet d'événements

**Définition** *(Système complet d'événements)*

Soit $\mathscr{A}$ tribu de parties de $\Omega$.

Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

- La famille $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** si :
  *1)* Pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
  *(les événements sont deux à deux incompatibles)*
  *2)* $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$

**Remarque**

- On peut réécrire cette définition en prenant une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ *(cf remarque « suite ou famille d'événements »).*
- Si on sait de plus que : $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, on obtient une partition de $\Omega$.
  On peut donc reprendre l'analogie du puzzle déjà mentionnée dans le chapitre « Ensemble et applications ». Les événements $A_i$ sont les pièces.
  *1)* Deux pièces ne se chevauchent jamais.
  *2)* Toutes les pièces mises côte à côte permettent de reconstituer le dessin qui n'est autre que $\Omega$.
- On peut aussi relier la notion de système complet d'événements à celle de raisonnement par disjonction de cas. Il repose sur 2 grands principes.
  *1)* Le caractère disjoint des cas étudiés : deux cas ne peuvent être vrais en même temps.
  *2)* Le caractère exhaustif de la recherche : si on regroupe tous les cas étudiés, on obtient tous les cas possibles.
- Enfin, on peut aussi faire le parallèle avec les structures conditionnelles. Un `if` à branchements multiples est correctement construit s'il vérifie les deux points suivants.
  *1)* Le caractère disjoint des cas étudiés : à l'aide de l'instruction `elif`, le 2ème branchement n'est considéré que si la condition de la 1ère branche n'est pas vérifiée (et ainsi de suite).
  *2)* Le caractère exhaustif de la recherche : on utilise l'instruction `else` (sans condition) dans la dernière branche ce qui assure qu'au moins un des blocs est exécuté.

**Exemple**

- Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
  × si $A \in \mathscr{A}$ alors $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.
  × si $I \subseteq \mathbb{N}$, $\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$ et $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ alors $(\{\omega_i\})_{i\in I}$ est un système complet d'événements.
  Comme on l'a vu au premier semestre, exhiber un système complet d'événements est nécessaire pour énoncer la formule des probabilités totales. On teste en fonction des différents cas possibles.
- Dans les exercices sur les probabilités, il faudra penser à la notion de système complet dès qu'une situation sera décrite en évoquant différents cas.

**Exercice**
On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%,
- si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

A-t-on intérêt à se fier aux résultats de ce test ?
Plus précisément, on calculera la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

# II. Espace probabilisé

## II.1. Probabilité

**Définition**
Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- Une probabilité est un application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :
  *1)* $\forall A \in \mathscr{A}$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$
  *2)* $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
  *(la probabilité de l'événement certain est 1)*
  *3)* Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles ($\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$), on a :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)}$$

  *(cette propriété est appelée $\sigma$-additivité)*
- Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

**Remarque**
- C'est une généralisation de la définition de probabilité du premier semestre : on ajoute le calul de la probabillité d'un événement défini par union dénombrable d'événements.
- Une probabilité étant $\sigma$-additive, elle est aussi additive.
  Ainsi, si $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_m$ des événements deux à deux incompatibles (*i.e.* $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$) on a :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)}$$

- Dans cette définition, il est sous-entendu que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est une série convergente. Si on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ alors il est simple de démontrer que $(S_n)$ est une suite croissante et majorée par 1 :
  × $S_{n+1} - S_n = \mathbb{P}(A_{n+1}) \geqslant 0$
  × $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant 1$

**Définition**
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Un événement $A$ est dit **négligeable** ou **quasi-impossible** si : $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Un événement $A$ est dit **quasi certain** si : $\mathbb{P}(A) = 1$.
- Traduction en terme de propriété : soit $\mathcal{P}$ une propriété.
  Si $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ vérifie la propriété $\mathcal{P}\}$ et $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que la propriété est vérifiée **presque sûrement**.

**Remarque**
Avec cette définition, les propriétés suivantes sont vérifiées.

- L'événement impossible $\varnothing$ est négligeable (quasi-impossible).
- L'événément certain $\Omega$ est quasi-certain.
- Attention : $A$ quasi certain n'implique pas $A = \Omega$.
- Attention : $A$ quasi-impossible n'implique pas $A = \varnothing$.

**Exemple**
On considère l'expérience aléatoire consistant en 1 lancer d'un dé à 6 faces. L'univers associé est $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On munit l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{2}$.

- Obtenir un résultat inférieur à 4 est un événement $A$ quasi-impossible.
  $A = \{1, 2, 3, 4\} \neq \varnothing$ et $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Obtenir un résultat supérieur ou égal à 5 est un événement $B$ quasi-certain.
  $B = \{5, 6\} \neq \Omega$ et $\mathbb{P}(B) = 1$.

On retiendra au passage que la notion d'événement quasi-certain (resp. quasi-impossible) est dépendante de la probabilté $\mathbb{P}$ choisie.

## II.2. Propriétés des probabilités

### II.2.a) Propriétés générales

**Propriété**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $A, B, C$ des événements ($(A, B, C) \in \mathscr{A}^3$).

***1)*** $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

***2)*** $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

***3)*** Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

***4)*** $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

***5)*** $$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) \ + \ \mathbb{P}(B) \ + \ \mathbb{P}(C) \\ & & - \ \mathbb{P}(A \cap B) \ - \ \mathbb{P}(A \cap C) \ - \ \mathbb{P}(B \cap C) \\ & & + \ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}}$$

*(formule du crible)*

*Démonstration.*

***1)*** On a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :
$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

***2)*** On a : $(B \setminus A) \ \cup \ (A \cap B) = B$ (réunion disjointe).
Ainsi, par additivité :
$$\mathbb{P}((B \setminus A) \ \cup \ (A \cap B)) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$$

***3)*** D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.
Or, comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$. Ainsi :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

***4)*** On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point ***2)*** que :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$

***5)*** Généralisation de la formule précédente :
$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\ \quad = \ \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\ \quad = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ \quad = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ \quad = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ \quad = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ \qquad - \left( \ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C)) \ \right) \\ \quad = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ \qquad - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ \qquad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$

□

### II.2.b) Propriété de la limite monotone

**Théorème 1.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.*

***1)*** *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ($A_n \subset A_{n+1}$) alors :*

***a)*** *la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,*

***b)*** $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)}$

***2)*** *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ($A_n \supset A_{n+1}$) alors :*

***a)*** *la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,*

***b)*** $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)}$

*Démonstration.*
On montre seulement la propriété ***1)***. La démonstration de la propriété ***2)*** est analogue.

***a)*** Comme $A_n \subseteq A_{n+1}$, on a $\mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_{n+1})$. Ainsi, la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ est croissante. Elle est de plus majorée par 1 ($\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) \leqslant 1$) donc convergente vers $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

***b)*** Afin de pouvoir utiliser la $\sigma$-additivité de l'application $\mathbb{P}$, on construit une suite $(B_n)$ d'événements deux à deux incompatibles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$.

(ce qui implique $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$).

Pour cela, on pose :

- $B_0 = A_0$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = A_k \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1}) = A_k \setminus A_{k-1}$
  car $A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1} = A_{k-1}$ puisque $(A_n)$ est une suite croissante.

Ainsi on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$

or : $\left|\begin{array}{lcl} \mathbb{P}(B_k) & = & \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_k \cap A_{k-1}) \\ & = & \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}) \\ \textit{(pour } k \geqslant 1\textit{)} & & \end{array}\right.$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

Et ainsi, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ □

**Remarque**
Ce résultat est appelé « propriété de la limite monotone » car il traite de la limite d'une suite croissante (et majorée).

**Théorème 2.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.*

***1)*** $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$

***2)*** $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$

*Démonstration.*

***1)*** Posons $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$. La suite $(B_n)$ ainsi construite est une suite croissante d'événements et vérifie : $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$. En effet :

$\times$ $A_n \subset B_n$ donc $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$

$\times$ $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ et donc $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent à la suite $(B_n)$.

***2)*** Démonstration analogue en posant $B_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$. □

**Remarque**

Il faut bien noter que l'on ne suppose pas, dans ce résultat, que la suite $(A_n)$ est croissante. Pour pouvoir utiliser le théorème de la limite monotone on a donc construit la suite auxiliaire $\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$ qui est une suite croissante d'événements.

# III. Probabilité conditionnelle

## III.1. Définition

**Théorème 3.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $A$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.*

*On considère l'application $\mathbb{P}_A$ suivante :*

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_A & : & \mathscr{A} & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}} \end{array}$$

- $\mathbb{P}_A$ *est une probabilité, appelée* **probabilité conditionnelle** *relative à $A$.*
- *Pour tout événement $B$, $\mathbb{P}_A(B)$ désigne la probabilité de $B$ sachant $A$.*

*Démonstration.*

$\mathbb{P}_A$ vérifie les axiomes d'une probabilité (en exercice). □

**Propriété**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $A$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

- Pour tout événement $B$ et $C$, on a :

***1)*** $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ donc $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$

***2)*** $\mathbb{P}_A(B \setminus C) = \mathbb{P}_A(B) - \mathbb{P}_A(B\cap C)$

***3)*** Si $B \subset C$, $\mathbb{P}_A(B) \leqslant \mathbb{P}_A(C)$

***4)*** $\mathbb{P}_A(B\cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B\cap C)$

***5)*** Si $(B_n)$ suite d'événements , on a :

$\mathbb{P}_A\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}_A\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k\right)$

$\mathbb{P}_A\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}_A\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} B_k\right)$

## III.2. Formules liées à la probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle étant posée, on s'intéresse maintenant à comment l'utiliser pour nous aider à réaliser des calculs de probabilité.

### III.2.a) Formule des probabilités composées

Ce premier résultat stipule que la donnée de $\mathbb{P}_A(B)$ nous enseigne la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

**Proposition 1.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soient $A$ et $B$ deux événements.*

*1) Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut écrire* $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$

*2) Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire* $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A)}$

*3) On a alors, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$ :* $\boxed{\mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$

*Démonstration.*
C'est la définition de probabilité conditionnelle ! □

Cette proposition peut se généraliser au cas d'une intersection d'un nombre fini (quelconque) d'événements.

**Théorème 4.**

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.*

*Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille finie d'événements de $\mathscr{A}$.*

*On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \neq 0$.*

*On a alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ \dots\ \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}}(A_m)}$$

*Démonstration.*
Faite au premier semestre. □

### III.2.b) Formule des probabilités totales

**Théorème 5.** *Formule des probabilités totales*

*Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

*Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements de $\mathscr{A}$.*

*On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n) \neq 0$.*

*Pour tout événement $B$, on a :*

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

*Démonstration.*
Comme $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements, on a : $\Omega = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$.
Ainsi, on a : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)$.
*(la distributivité, les lois de de Morgan se généralisent au cas dénombrable)*
Et comme $(B \cap A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements incompatibles, on a :
$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i)$. Enfin, comme $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ (pour tout $i \in \mathbb{N}$), on a :
$\mathbb{P}_{A_i}(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(A_i)}$, ce qui permet de terminer la démonstration. □

**Cas particulier du système complet** $(A, \bar{A})$
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $A$ est un événement $(A \in \mathscr{A})$.
La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements fini.

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors, pour tout $B \in \mathscr{A}$, on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B) \ + \ \mathbb{P}(\bar{A})\ \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}$$

**Exercice**

On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$. Dans l'urne numéro $k$ se trouvent $k$ boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

***a.*** Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

***b.*** Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

***c.*** Quelle est la limite de ces probabilités quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Remarque**

- La difficulté de cet exercice réside dans le fait que la modélisation mathématique est absente. On insiste ici sur le raisonnement à mener qui est assez naturel et très fréquent dans les exercices.
- La probabilité de tirer 2 boules blanches dépend de l'urne dans laquelle s'effectue le tirage.
  - × Soit on tire dans l'urne 1 et dans ce cas ...
  - × Soit on tire dans l'urne 2 et dans ce cas ...
  - × ...
  - × Soit on tire dans l'urne $n$ et dans ce cas ...
- On voit clairement apparaître un raisonnement par disjonction de cas, ce qui signifie qu'il y a un système complet d'événements sous-jacent.
- L'idée ici est de tester l'événement « obtenir 2 boules » suivant chacun des cas listés précédemment.
  Cela correspond à utiliser la formule des probabilités totales.

Il n'y a plus qu'à formaliser ces idées.

*Démonstration.*

On note $A_k$ : « le tirage s'effectue dans l'urne $k$ » (pour $k \in [\![1,n]\!]$).
On note $B$ : « on tire deux boules blanches ».

***a.*** La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
De plus, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k} \neq 0$ *(ne pas oublier cette hypothèse)*.
On en déduit, par la formule des probabilités totales que :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Or on a :

- $\mathbb{P}_{A_1}(B) \;=\; 0$ (l'urne 1 ne contient qu'une boule blanche).
- $\mathbb{P}_{A_k}(B) \;=\; \dfrac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} \;=\; \dfrac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} \;=\; \dfrac{k!}{\cancel{2!}(k-2)!} \times \dfrac{\cancel{2!}(n-2)!}{n!} \;=\; \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$
  (pour $k \in [\![2,n]\!]$)

Ainsi, si $n \geqslant 2$, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\cancel{k}} \times \frac{\cancel{k}(k-1)}{n(n-1)} \;=\; \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k \;=\; \frac{1}{n(n-1)} \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \frac{1}{2}$$

***b.*** On raisonne de la même manière que précédemment.
Dans le cas d'un tirage successif avec remise, on a, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ :

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) \;=\; \frac{k \times k}{n \times n}$$

On obtient ainsi :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cancel{k}} \times \frac{\cancel{k} \times k}{n \times n} \;=\; \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \;=\; \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \;=\; \frac{n+1}{n} \; \frac{1}{2}$$

***c.*** Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$, on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$.

□

### III.2.c) Formule de Bayes

**Théorème 6.** *Formule de Bayes*

*Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

*Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un système complet d'événements de* $\mathscr{A}$.

*On suppose :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(A_n) \neq 0$.

*Pour tout* $j \in \mathbb{N}$, *pour tout* $B$ *tel que* $\mathbb{P}(B) \neq 0$, *on a :*

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A_j) \ = \ \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\mathbb{P}(B)} \ = \ \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)}}$$

*Démonstration.*
La première égalité n'est autre que la formule 3) de la proposition 1.
La seconde égalité est une conséquence directe de la formule des probabilités totales. □

**Cas particulier du système complet** $(A, \bar{A})$
Soit $A$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors, pour tout événement $B$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) \ = \ \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} \ = \ \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)\ +\ \mathbb{P}(\bar{A})\ \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}}$$

**Formule des causes**
La formule $\mathbb{P}_B(A) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$ est connu sous le nom de « formule des causes ». Si l'on considère l'événement $A$ comme étant postérieur à l'événement $B$, cette formule peut paraître étonnante puisqu'elle ne suit pas l'ordre chronologique. On calcule en effet la probabilité de l'événement $A$ (antérieur à $B$) sachant que $B$ est réalisé.

# IV. Indépendance en probabilité

## IV.1. Indépendance de deux événements

**Définition**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Deux événements $A$ et $B$ sont dits indépendants **pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

**Remarque**
Il ne faut pas confondre cette propriété, **liée à une probabilité** $\mathbb{P}$ avec celle d'incompatibilité qui ne dépend que des événements !

**Théorème 7.**

*Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

*Soient* $A$ *et* $B$ *deux événements.*

*1) Si* $\mathbb{P}(A) \neq 0$ *alors on a :*

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)}$$

*2) Si* $\mathbb{P}(B) \neq 0$ *alors on a :*

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)}$$

La notion d'indépendance n'est pas une notion intrinsèque aux événements : elle dépend fortement de la probabilité choisie. Autrement dit, deux événements peuvent être indépendants pour une probabilité et dépendants pour une autre.

## IV.2. Indépendance deux à deux

### Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \ \Rightarrow \ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \ = \ \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}(A_j)}$$

## IV.3. Indépendance mutuelle d'une famille d'événements

### Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **mutuellement indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\forall J \subseteq N, \qquad \left.\begin{array}{c} J \textbf{ fini} \\ J \subset I \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \mathbb{P}\left( \bigcap_{j \in J} A_i \right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)}$$

### Remarque

- Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse (*on aurait sinon deux noms différents pour la même notion !*).

$$\begin{array}{ccc} \text{indépendance mutuelle} & \Rightarrow & \text{indépendance 2 à 2} \\[1em] \text{indépendance mutuelle} & \not\Leftarrow & \text{indépendance 2 à 2} \end{array}$$

- On pourra se reporter au chapitre du premier semestre pour plus de détails.