Feuille d'exercices n°18 : Espaces probabilisés cas général

Notion de tribu

Exercice 1. (★)
Soit $\Omega = [\![1, 5]\!]$.

a. L'ensemble $\mathscr{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ est-il une tribu ?

b. Quelle est la plus petite tribu contenant $\mathscr{B}$?

Exercice 2. (★★)
Notons $\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ fini ou } \bar{A} \text{ fini}\}$.
Démontrer que $\mathscr{A}$ n'est pas une tribu.

Exercice 3. (★★)
Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et (A_n) une suite d'événements.

1) a. Démontrer que $A = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\geqslant p} A_n$ est un événement.

b. Exprimer le fait que A soit réalisé en fonction de la réalisation des éléments de la suite (A_n).

2) a. Démontrer que $B = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\geqslant p} A_n$ est un événement.

b. Exprimer le fait que B soit réalisé en fonction de la réalisation des éléments de la suite (A_n).

Probabilité et propriété de σ-additivité

Exercice 4. (☆)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles.

a. Montrer que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

b. En déduire la limite de la suite $(\mathbb{P}(A_n))$.

Exercice 5. (★)
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Montrer que : $\mathbb{P}(\{n\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6. (★)
Soit $p \in]0, 1[$. On considère l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \to \mathbb{R}$ dont la valeur sur les singletons $\{k\}$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{k\}) = p\,(1-p)^{k-1}$$

Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

Exercice 7. (★)
Soit $\lambda > 0$. On considère l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ dont la valeur sur les singletons $\{k\}$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{k\}) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

a. Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

b. Notons A l'ensemble des entiers pairs.

Montrer que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}\,(1 + \mathrm{e}^{-2\lambda})$.

Formule des probabilités composées

Exercice 8. (★)
Une urne contient deux boules blanches et une boule noire.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire.
On considère les événements suivants :

× A : « on effectue un nombre fini de tirages »,
× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : « le jeu s'arrête au $n^{\text{ème}}$ tirage »,
× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n : « on tire une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage ».

a. Démontrer que les événements F_n sont deux à deux incompatibles.

b. Exprimer l'événement F_n en fonction des événements B_i ($i \in [\![1, n]\!]$).

c. Exprimer A en fonction des événements F_n et déterminer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 9. (★★)
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
On tire successivement des boules dans cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule supplémentaire de la même couleur.
On note A_n l'événement : « la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche ».

a. Exprimer en fonction des événements A_n l'événement A : « toutes les boules tirées sont blanches ».

b. Déterminer $\mathbb{P}(A)$.

c. Montrer que la boule rouge initiale sera tirée, de manière presque sûre, au cours de l'expérience.

Indépendance d'événements

Exercice 10. (★)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

a. Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ tels que A et B sont indépendants.
Démontrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

b. Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$.
Démontrer que : $\forall B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants.

c. Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 1$.
Démontrer que : $\forall B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants.

Formule des probabilités totales (ou presque ...)

Exercice 11. (★★)
Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré :

× s'il obtient 6, il tire une boule dans l'urne et le jeu s'arrête.
× sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation.

On note B l'événement : « la boule tirée est rouge ».
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : « le jeu s'arrête au $n^{\text{ème}}$ tour ».
Enfin, on note A l'événement : « on obtient un 6 au cours de la partie ».

a. Exrpimer A en fonction des événements de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b. Démontrer que $\mathbb{P}(A) = 1$ *(l'événement A est presque certain)*.

c. Déterminer la probabilité de l'événement B.
On pourra utiliser le résultat de l'exercice 10.
(on donne la formule : $\forall x \in]-1, 1[, \ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$)

Formule des probabilités totales

Exercice 12. (★)
On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%,
- si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

A-t-on intérêt à se fier aux résultats de ce test ?
Plus précisément, on calculera la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

Exercice 13. (★★)
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

a. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

b. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

c. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 14. (★★)
Soient $\lambda > 0$ et $p \in]0,1[$ et $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. On suppose de plus que :

× $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(B_n) \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda}\, \dfrac{\lambda^n}{n!}$

× $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{B_n}(A_k) \ = \ \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_k) \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda p}\, \dfrac{(\lambda\, p)^k}{k!}$.

Théorème de la limite monotone

Exercice 15. (★)
On effectue une infinité de lancers d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0,1[$. Pour $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement :

A_n : « au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile »

a. Montrer que $\mathbb{P}(A_n) \ = \ \begin{cases} \dfrac{p^{n+1}-(1-p)^{n+1}}{2p-1} & \text{si } p \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b. Est-il possible que face ne soit jamais suivi de pile ?

Exercice 16. (★)
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\geqslant m}$ une suite d'événements (où $m \in \mathbb{N}$). Démontrer que :

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n) \ = \ 0 \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n) \ = \ 0$$

(en s'inspirant de la démonstration vue en cours, on pourra introduire une suite (B_n) afin d'utiliser la σ-additivité de $\mathbb{P}$)

Exercice 17. (★)
On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer indéfiniment un dé équilibré à 6 faces. On note A_n l'événement :

A_n : « on n'a pas obtenu 6 lors des n premiers lancers »

a. Exprimer l'événement A : « on n'obtient jamais 6 » en fonction des événements A_n.

b. En déduire la probabilité de A.

c. Démontrer que l'événement B : « obtenir au moins une fois un numéro pair » est un événement presque sûr.

Indépendance d'événements et encore limite monotone ...

Exercice 18. (★★★)
Soit (A_n) une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $B = \bigcap\limits_{n \geqslant 1} \bigcup\limits_{k \geqslant n} A_k$.
On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité de } A_n\}$$

Dans la suite, on suppose que :

- les événements (A_n) sont indépendants,
- la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a. Montrer que : $\overline{B} = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \bigcap\limits_{k \geqslant n} \overline{A_k}$.

b. Exprimer $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k})$ en fonction des p_k.

c. Montrer que la série $\sum \ln(1 - p_k)$ diverge vers $-\infty$.
(on pourra distinguer le cas où $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et le cas $p_n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$)

d. Simplifier $\ln\left(\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=n}^{m} \overline{A_k})\right)$ et en déduire que $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k \geqslant n} \overline{A_k}) = 0$.

e. Démontrer que la suite $(\bigcap\limits_{k \geqslant n} A_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

f. En déduire une écriture simplifiée de $\bigcup\limits_{n=1}^{m} \bigcap\limits_{k \geqslant n} \overline{A_k}$.

g. Démontrer enfin que B est un événement presque sûr.
(on pourra utiliser le résultat de l'exercice 14)

Exercice 19. (★★★)

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $1 - x \leqslant e^{-x}$.

2) On dispose d'une urne vide au départ.

- Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (!).
- Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment ...

a. Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{i \in [\![1,l]\!]}$ une famille de ℓ événements indépendants.

Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant \ell} \overline{E_i}) \leqslant \mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(E_i)}$

b. On note A_k : « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ».
Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$.

c. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort au moins une fois à partir du $n^{\text{ème}}$ tirage » (où $n \in \mathbb{N}$).
Déterminer la probabilité de cet événement en considérant son contraire.

d. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort une infinité de fois ».
Déterminer la probabilité de cet événement.

e. À l'aide des événements A_k, exprimer l'événement : « la boule 10 sort une infinité de fois **de suite** ».
Déterminer la probabilité de cet événement.