CH II : Rappels et approfondissements
Calcul élémentaire, polynômes, résolution d'équations et d'inéquations

I. Règles de calcul élémentaire

I.1. Manipulation de fractions

Les règles ci-dessous sont valables pour tout a, b, c et d réels sous réserve que les dénominateurs des fractions considérées ne sont pas nuls.

Somme $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Produit $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Quantité conjuguée $$\frac{a}{b-c} = \frac{a(b+c)}{b^2-c^2}$$

Division $$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$
$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Exercice
Simplifier les expressions suivantes.

a. $\dfrac{\frac{3}{2}}{3}$

b. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{6}$

c. $\dfrac{2^5\times 25\times 3^{-4}\times 36}{3^8\times 45\times 100}$

d. $(\sqrt{2}+5\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

e. $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$

f. $\dfrac{1}{5-3\sqrt{2}}+\dfrac{3-3\sqrt{2}}{7}$

I.2. Puissances entières

Les égalités suivantes sont vérifiées pour $n, m \in \mathbb{Z}$ et pour tout a et b réels, sous réserve que les dénominateurs des fractions considérées ne sont pas nuls.

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$(a^n)^m = a^{n\times m}$$
$$(a\times b)^n = a^n\times b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$(a^n\times a^m) = a^{n+m}$$
$$\left(\frac{a^n}{a^m}\right) = a^{n-m}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ces listes ne se veulent pas exhaustives.
Elles sont à compléter au fur et à mesure de l'année.

II. Polynômes

II.1. Définitions et notations

Définition

- Un polynôme <u>non nul</u> P est un élément de la forme :

$$\boxed{P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0}$$

  où
  - × $a_n \neq 0$,
  - × les éléments a_i sont des réels appelés les **cœfficients** de P,
  - × l'élément X est l'**indéterminée** du polynôme P,
  - × n est appelé le **degré** de P et on note $\boxed{n = \deg(P)}$,
  - × les éléments $a_i X^i$ sont les **termes** du polynôme P,
  - × l'élément $a_n X^n$ est le **terme de plus haut degré** du polynôme,
  - × a_n est donc le cœfficient du terme de plus haut degré de P,
  - × a_0 est appelé le **terme constant** de P.
- Un polynôme P est constant si tous ses cœfficients, excepté (éventuellement) le cœfficient a_0, sont nuls.
  Les polynômes constants non nuls sont de degré 0.
- Parmi les polynômes constants, on distingue le polynôme nul $P = 0$.
  Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$ ($\deg 0 = -\infty$).
- On appelle fonction polynomiale associée à P la fonction

$$\begin{array}{rccl} P & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{array}$$

  (on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée)
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à cœfficients dans $\mathbb{R}$ et d'indéterminée X.
- Enfin, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à n.

Exemple

- L'élément $P(X) = 3X^2 + 5X + 2$ est un polynôme *i.e.* un élément de $\mathbb{R}[X]$.
  - × $\deg(P) = 2$,
  - × P a 3 cœfficients : $a_2 = 3$, $a_1 = 5$ et $a_0 = 2$,
  - × P est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$.
    C'est aussi un élément de $\mathbb{R}_5[X]$ puisque $\deg(P) \leqslant 5$.
- $Q(X) = -7X^3 + \sqrt{2}$ est un polynôme *i.e.* un élément de $\mathbb{R}[X]$.
  - × $\deg(Q) = 3$,
  - × Q a 4 cœfficients : $b_3 = -7$, $b_2 = 0$ et $b_1 = 0$, $b_0 = \sqrt{2}$,
  - × Q est un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.
    (c'est aussi un élément de $\mathbb{R}_5[X]$, $\mathbb{R}_7[X]$, $\mathbb{R}_{523}[X]$, ...)

Condition d'égalité de deux polynômes

Considérons deux polynômes :

$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ (avec $a_n \neq 0$)

$Q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0$ (avec $b_m \neq 0$)

- Un polynôme est nul si et seulement si tous ses cœfficients sont nuls.
- On en déduit la condition d'égalité de deux polynômes P et Q puisque :

$$P = Q \ \Leftrightarrow \ P - Q = 0$$

  Ainsi, deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si :
  - × ils sont de même degré,
    ($\deg(P) = \deg(Q)$)
  - × les cœfficients de leurs termes de même degré sont égaux.
    ($\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = b_i$)

Proposition 1.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

On a alors :

1) $\deg(P \times Q) \ = \ \deg(P) + \deg(Q)$

2) $\deg(P + Q) \ \leqslant \ \max(\deg(P), \deg(Q))$

Démonstration.
On ne détaille pas ici le cas où (au moins) l'un des deux polynômes est nul (en exo !). Dans la suite, on suppose donc P et Q non nuls.
Les polynômes P et Q s'écrivent donc sous la forme :

$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ (avec $a_n \neq 0$),

$Q(X) = b_m X^m + \cdots + b_1 X + b_0$ (avec $b_m \neq 0$).

1) Le cœfficient de plus haut degré du polynôme $P \times Q$ est :

$$(a_n X^n) \times (b_m X^m) = a_n b_m X^{n+m}$$

Ainsi, $\deg(P \times Q) = n + m$.

2)
- Si $n \neq m$ et $n > m$ (réciproquement $n < m$) on a $\deg(P + Q) = n$ (réciproquement $\deg(P + Q) = m$).
- Si $n = m$, on n'a pas forcément $\deg(P + Q) = n$.
  En effet, on peut avoir $b_n = -a_n$.
  Cette remarque est aussi valable pour les autres cœfficients.
  Si bien qu'on peut juste affirmer $\deg(P + Q) \leqslant n$. □

II.2. Racines d'un polynôme

Définition *Racine d'un polynôme*
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

- L'élément α de $\mathbb{R}$ est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Le théorème suivant stipule que tout polynôme peut être factorisé grâce à la donnée de ses racines.

Théorème 1.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Soit α un élément de $\mathbb{R}$.

- *On a alors :*

$$\boxed{P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P(X) = (X - \alpha)\ Q(X)}$$

- *Autrement dit, α est une racine de P si et seulement si P peut s'écrire sous la forme $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.*

Remarque
Grâce à la proposition 1, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \deg(P) & = & \deg((X-\alpha)\ Q(X)) \\ & = & \deg(X-\alpha) + \deg(Q) \\ & = & 1 + \deg(Q) \end{array}$$

On en déduit que : $\boxed{\deg(Q) = \deg(P) - 1}$.

Exercice
On considère le polynôme $P(X) = 3X^2 - X - 2$.

1) Montrer que 1 est une racine de P.

2) Trouver un polynôme Q tel que $P(X) = (X - 1)Q(X)$.

Démonstration.

1) $P(1) = 3 - 1 - 2 = 0$ donc 1 est une racine de P.

2) D'après le théorème 1, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X) = (X - 1)Q(X)$.
On a alors $\deg(P) = 1 + \deg(Q)$ et donc $\deg(Q) = 1$. Ainsi, il existe a et b réels tels que $Q(X) = aX + b$ et donc :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (X-1)(aX+b) \\ & = & aX^2 + (b-a)X - b \\ & = & 3X^2 - X - 2 \end{array}$$

Comme deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs cœfficients sont égaux, on a que $a = 3$, $b - a = -1$ et $-b = -2$.
Et ainsi : $P(X) = (X-1)(3X+2)$. □

Lors de la démonstration précédente, on a identifié les cœfficients de P avec les cœfficients de $aX^2 + (b-a)X - b$.
On dit qu'on procède **par identification**.

II.3. Rappels sur le trinôme du second degré

Soient a, b, c réels avec $a \neq 0$.
On considère l'équation suivante d'inconnue x :

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

II.3.a) Résolution dans le cas général

L'idée de la résolution est de factoriser le terme $ax^2 + bx + c$ en se servant de l'identité remarquable $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$.

- 1ère étape : reconnaître dans $ax^2 + bx$ le début du développement d'un carré.
$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$
- 2ème étape : obtention de la forme canonique du trinôme.
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cancel{a}\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \end{aligned}$$
- 3ème étape : utilisation de l'identité remarquable et résolution.
Notons $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas se présentent alors.
  × si $\Delta > 0$, on peut alors écrire :
$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$
  Ayant fait apparaître ce carré, on a alors :
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \end{aligned}$$
  Dans ce cas, l'équation (1) admet deux solutions :
$$\boxed{x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$
  × si $\Delta = 0$, on a alors : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$
  Dans ce cas, l'équation (1) admet une solution double :
$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$
  × si $\Delta < 0$, l'équation (1) n'admet pas de solution car :
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0 \leqslant) \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \ (< 0)$$

En résumé, on a trois cas :

$\Delta > 0$	$x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	deux racines différentes
$\Delta = 0$	$x = \dfrac{-b}{2a}$	une racine double
$\Delta < 0$		pas de racine réelle

Remarque *Discriminant réduit*

Si b s'écrit $b = 2b'$, on peut utiliser le discriminant réduit $\boxed{\Delta' = (b')^2 - ac}$

Dans le cas où $\Delta' > 0$, l'équation admet les deux racines :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}}$$

Théorème 2.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ $(a \neq 0)$ un polynôme de degré 2.

Supposons que $\Delta \geqslant 0$ et notons x_1 et x_2 les racines de P.

Alors $\boxed{P(X) = a(X - x_1)(X - x_2)}$.

Démonstration.
Il suffit de reprendre la démonstration précédente.
On a démontré (par des manipulations arithmétiques) que :

$$P(X) = aX^2 + bX + c = a\left(X - \underbrace{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}_{x_1}\right)\left(X - \underbrace{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}_{x_2}\right)$$

□

II.3.b) Relations entre cœfficients et racines

Théorème 3.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ $(a \neq 0)$ un polynôme de degré 2.

Supposons que $\Delta \geqslant 0$ et notons x_1 et x_2 les racines de P.

On a alors : $\boxed{x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}}$ *et* $\boxed{x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}}$

Démonstration.
D'après le théorème précédent, on a :

$$\begin{array}{rcl} aX^2 + bX + c & = & a(X - x_1)(X - x_2) \\ & = & a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2 \\ & = & aX^2 - a(x_1 + x_2)X + ax_1x_2 \end{array}$$

Par identification, on en déduit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & a \\ -a(x_1 + x_2) & = & b \\ ax_1x_2 & = & c \end{array}\right.$$

D'où le résultat souhaité. □

Application *Cas des racines évidentes*

- Considérons le polynôme $P(X) = 5X^2 + 6X - 11 = 0$.
  - × P admet $x_1 = 1$ pour racine évidente.
  - × P admet donc une autre racine, x_2, qui vérifie $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.
    Ainsi, $x_2 = \dfrac{c}{ax_1} = -\dfrac{11}{5}$.
- Inversement, si l'on cherche à déterminer deux réels x_1 et x_2 dont on connaît uniquement la somme S $(= x_1 + x_2)$ et le produit P $(= x_1 \times x_2)$, il suffit de résoudre l'équation :

$$X^2 - SX + P = 0$$

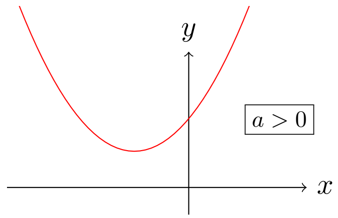
II.3.c) Signe du trinôme

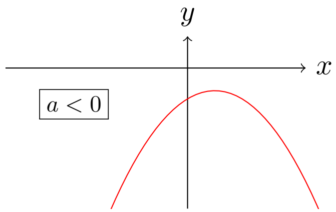
Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ dépend :

- du signe de a,
- de l'existence de racines réelles.

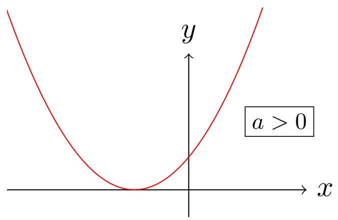
Précisons cette dépendance.

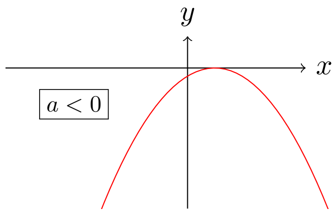
1) En cas d'absence de racine réelle, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est de signe constant, égal au signe de a.
Le graphe de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est de la forme :





2) En cas de racine réelle double, le trinôme est alors aussi de signe constant (nul en la racine), égal au signe de a.
Le graphe de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est de la forme :





3) En cas de deux racines réelles x_1 et x_2 :

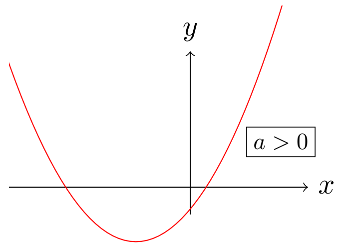
(a) si $a > 0$, alors le trinôme est strictement négatif sur $]x_1, x_2[$ et positif ailleurs : $a(x - x_1)(x - x_2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$

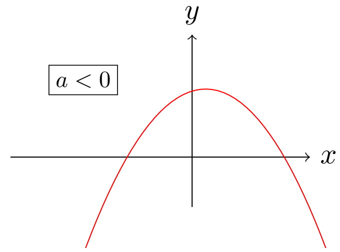
(b) si $a < 0$, alors le trinôme est strictement positif sur $]x_1, x_2[$ et négatif ailleurs : $a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau suivant.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\Delta > 0$ Le signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

Le graphe de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est de la forme :





Petit aparté : déterminer le signe d'un produit

Lorsque l'on souhaite déterminer le signe d'une quantité s'écrivant comme un produit, on utilise souvent un tableau de signes.
Considérons par exemple, le produit $P(x) = (4x - 1)(7x - 3)(-x - 2)$.
Le tableau de signe correspondant est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
$4x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x - 2$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$P(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Exercice
Écrire le tableau de signe de la quantité $\dfrac{(4x-1)(7x-3)}{(-x-2)}$.

III. Identités remarquables

Ci-dessous une liste (non exhaustive !) d'identités remarquables. Cette liste est à compléter au fur et à mesure de l'année.

Identités remarquables du second degré :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (a+b)^2 &=& a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 &=& a^2-2ab+b^2 \\ (a-b)(a+b) &=& a^2-b^2 \\ (a+b)^2-(a-b)^2 &=& 4ab \end{array}}$$

Identités remarquables du troisième degré :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (a+b)^3 &=& a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 &=& a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ a^3+b^3 &=& (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3 &=& (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{array}}$$

En degré quelconque $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

On a notamment :

$$\boxed{1 - a^n = (1-a)(1 + a + a^2 + ... + a^{n-1})}$$

Exercice
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$.

IV. Résolution d'équations

IV.1. Illustration de la méthode sur un exemple

Explicitons la méthode de résolution sur un exemple simple.
On considère l'équation suivante.

$$\sqrt{x^2} - 2x = -1 \qquad (E)$$

La méthode de résolution de (E) peut se présenter en quatre grandes étapes.

- **Étape 0** : déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_{(E)}$

  Avant d'essayer de résoudre (E), on commence par étudier son domaine de définition $\mathscr{D}_{(E)}$. C'est une remarque générale : lors de l'étude d'un objet mathématique, on commence toujours par déterminer son lieu de définition.

  L'équation (E) comporte l'opérateur racine (qui est défini sur $\mathbb{R}^+$).
  Or, comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $\sqrt{x^2}$ est bien définie.
  On en déduit que $\boxed{\mathscr{D}_{(E)} = \mathbb{R}}$

- **Étape 1** : obtention de l'équation (E')

  Sous cette forme, l'équation (E) n'est pas facile à résoudre. On va donc opérer des manipulations afin de transformer l'équation (E) en une équation plus simple, notée (E').

  Soit x une solution de (E) (on a notamment $x \in \mathscr{D}_{(E)}$).
  Afin de se débarrasser de l'opérateur racine, on isole le terme $\sqrt{x^2}$ et on élève au carré. Plus précisément, on a :

$$\begin{array}{rc} & \sqrt{x^2} - 2x = -1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2} = 2x - 1 \\ \Rightarrow & \left(\sqrt{x^2}\right)^2 = (2x-1)^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 = 4x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow & \boxed{3x^2 - 4x + 1 = 0} \qquad (E') \end{array}$$

- **Étape 2** : résolution de (E')

  Ayant obtenu l'équation (E'), il s'agit maintenant de la résoudre.

  Le polynôme $P(X) = 3X^2 - 4X + 1$ admet $x_1 = 1$ comme racine évidente.
  Son autre racine x_2 vérifie $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$. Ainsi, $x_2 = \frac{1}{3}$.

  L'ensemble des solutions de (E') est $\boxed{S' = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}}$

- **Étape 3** : test des solutions de (E') sur l'équation (E)

  On a résolu l'équation (E') mais a-t-on résolu l'équation initiale (E) pour autant ? Testons les solutions de (E') sur l'équation (E) :

  × Tout d'abord, on a : $1 \in \mathscr{D}_{(E)}$ $(= \mathbb{R})$.
  D'autre part : $\sqrt{1^2 - 2 \times 1} = -1$.
  Ainsi, 1 est bien solution de (E).

  × On a aussi : $\frac{1}{3} \in \mathscr{D}_{(E)}$ $(= \mathbb{R})$.
  D'autre part : $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \neq -1$.
  Ainsi, $\frac{1}{3}$ n'est pas solution de (E).

- **Conclusion**
  L'équation (E) admet pour unique solution le réel 1.
  Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{S = \{1\}}$

IV.2. Analyse de la méthode

À l'issue de cet exemple, on peut se poser deux questions :

1) A-t-on bien trouvé toutes les solutions de (E) ?

2) Pourquoi (E) et (E') n'ont-elles pas les mêmes solutions ?

IV.2.a) Résolution par implication : fonctionnement

Comme on l'a vu, (E) et (E') n'ont pas forcément les mêmes solutions. Cela provient des manipulations faites pour transformer (E) en (E') : elles ont pu modifier l'ensemble des solutions. Explicitons pourquoi.
Nous avons procédé par implication, ce qui s'écrit formellement :

$$\boxed{x \text{ solution de } (E) \ \Rightarrow \ x \text{ solution de } (E')}$$

Cette implication permet d'affirmer que :

- si x est solution de (E) alors x est solution de (E')

  $\hookrightarrow$ toute solution de (E) est une solution de (E') *i.e.* $\boxed{S \subseteq S'}$

- x peut être solution de (E) sans que x soit solution de (E')

En modifiant (E) en (E'), on ne perd en route aucune solution de (E) (puisque $S' \supseteq S$) mais on a pu créer de « nouvelles solutions » (*i.e.* des solutions de (E') qui ne sont pas solutions de (E)). C'est pourquoi les solutions de (E) sont exactement celles de (E') qui vérifient l'équation (E).

Exercice
Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{3x-1} = 0$.

IV.2.b) Est-il possible de procéder par équivalence ?

Dans l'exemple précédent, une manipulation a créé une perte de précision : il s'agit de l'élévation au carré. De manière générale :

$$u = v \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad u^2 = v^2$$

Évidemment, l'implication $u = v \Rightarrow u^2 = v^2$ est toujours vérifiée. Par contre, on peut exhiber un contre-exemple de la réciproque : $(-3)^2 = 3^2$ et $-3 \neq 3$.
Il faut donc faire attention aux signes des quantités u et v.
En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad (|u| = |v| \ \Leftrightarrow \ u^2 = v^2)}$$

Résolvons l'équation (E) : $\sqrt{x^2} = 2x - 1$ par équivalence.

- **Étape 0** : $\mathscr{D}_{(E)} = \mathbb{R}$.
- **Étape 1** : obtention, par équivalence, de l'équation (E')

  Afin que l'élévation au carré se fasse sans perte de précision, il faut faire une étude précise des signes des quantités considérées. On a : $\sqrt{x^2} \geqslant 0$ (une racine est toujours positive). Deux cas se présentent alors pour $2x - 1$:

  a) $\underline{2x - 1 \geqslant 0}$: ceci est réalisé pour $x \geqslant \frac{1}{2}$. Dans ce cas, on a :

  $$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[, \quad \left(\sqrt{x^2} = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = (2x-1)^2\right)$$

  b) $\underline{2x - 1 < 0}$: la recherche de solutions est triviale dans ce cas puisqu'on a alors, si x est solution de (E) : $0 \leqslant \sqrt{x^2} = 2x - 1 < 0$. Impossible !
- **Étape 2** : résolution de (E')

  L'équation (E') : $3x^2 - 4x + 1 = 0$ admet $x = 1$ et $x = \frac{1}{3}$ comme seules solutions.
- **Conclusion** : résolution de (E)

  a) (E) est équivalente à (E') sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Comme $\frac{1}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on en conclut que (E) admet 1 pour unique solution sur cet intervalle.

  b) (E) n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Exercice
Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{3x-1} = 0$ en procédant par équivalence.

IV.2.c) Doit-on procéder par implication ou par équivalence ?

Lorsqu'il s'agit de résoudre une équation, la méthode consistant à procéder par implication, plus simple, sera toujours préférée à la méthode de raisonnement par équivalence.

V. Résolution d'inéquations

Dans le cas des inéquations, seul le raisonnement par équivalence est adapté. Le problème avec le raisonnement par implication provient de l'étape consistant à tester les solutions de (I') sur l'équation (I). Cette étape est généralement difficile à mettre en place lors de la résolution d'inéquations (généralement (I') admet non pas un nombre fini de solutions mais un ensemble infini de solutions). On préférera donc toujours le raisonnement par équivalence dans le cas d'inéquations.

V.1. Illustration de la méthode sur un exemple

On considère l'inéquation suivante.

$$-x + 1 < \sqrt{3x^2 - 4x - 7} \qquad (I)$$

- **Étape 0** : déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_{(I)}$

  On remarque que $3x^2 - 4x - 7 = 3\,(x+1)\left(x - \frac{7}{3}\right)$.

  $\mathscr{D}_{(I)} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 4x - 7 \geqslant 0\} = \,]-\infty, -1] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right[$.

  $$\boxed{\mathscr{D}_{(I)} = \,]-\infty, -1] \cup \left[\tfrac{7}{3}, +\infty\right[}$$
- **Étape 1** : obtention, par équivalence, de l'inéquation (I')

  Comme dans le cas précédent : $u < v \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad u^2 < v^2$.
  En toute généralité, comme $\sqrt{u^2} = |u|$ (pour tout $u \in \mathbb{R}$), on a :

  $$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, \quad \left(|u| < |v| \;\Leftrightarrow\; u^2 < v^2\right)}$$

  Il s'agit donc de procéder par disjonction de cas, en fonction du signe des quantités que l'on considère.

Dans notre exemple :

× $\sqrt{3x^2-4x-7} \geqslant 0$ (une racine est toujours positive),

× $-x+1 \geqslant 0$ si $x \in]-\infty, 1]$ et $-x+1<0$ si $x \in]1,+\infty]$.

a) si $-x+1 \geqslant 0$
Si $x \in]-\infty, 1]$, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{array}{rrcl} & -x+1 & < & \sqrt{3x^2-4x-7} \\ \Leftrightarrow & (-x+1)^2 & < & 3x^2-4x-7 \\ \Leftrightarrow & x^2-2x+1 & < & 3x^2-4x-7 \\ \Leftrightarrow & 0 & < & 2x^2-2x-8 \\ \Leftrightarrow & 0 & < & x^2-x-4 \end{array}$$

b) si $-x+1<0$
Si $x \in]1,+\infty[$, la recherche des solutions de l'inéquation est triviale puisque on doit alors trouver tous les éléments x tels que :

$$\sqrt{3x^2-4x-7} > -x+1 \quad \text{où} \quad x+1<0$$

Or on a : $\sqrt{3x^2-4x-7} \geqslant 0 > -x+1$ (une racine est toujours positive). Tout réel x (dans $]1,+\infty[$) est solution de l'inéquation (I').

- **Étape 2** : résolution de (I')

Seul le cas ***a)*** doit être détaillé puisque la résolution est triviale dans le cas ***b)***. Il s'agit donc de déterminer le signe du trinôme $P(x)=x^2-x-4$.
Ce trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

Ainsi $P(x)>0$ si $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2,+\infty[$.

- **Conclusion** : résolution de (I)

a) Dans ce premier cas, l'ensemble des solutions de (I) est donc :

$$S_1 = \mathscr{D}_{(I)} \cap]-\infty,1] \cap (]-\infty,x_1[\cup]x_2,+\infty[) =]-\infty,x_1[$$

b) Dans ce deuxième cas, l'ensemble des solutions de (I) est donc :

$$S_2 = \mathscr{D}_{(I)} \cap]1,+\infty[= \left[\tfrac{7}{3},+\infty\right[$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est donc donné par :

$$\boxed{S = S_1 \cup S_2 =]-\infty,x_1[\cup \left[\tfrac{7}{3},+\infty\right[}$$

Exercice
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $x+2 \geqslant \sqrt{x+5}$

b. $-x+1 > \sqrt{3x^2-2x-7}$

c. $x-2 \leqslant \sqrt{x-1}$

d. $\sqrt{x+3} < -x+4$

e. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1$