

Feuille d'exercices n°2 :
Calcul élémentaire, polynômes, résolution
d'inéquations

Calcul élémentaire

Exercice 1. (☆) *Un peu d'entraînement au calcul ...*

Simplifier les expressions suivantes.

a. $\frac{\frac{3}{2}}{3}$

d. $(\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

b. $\frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{5}{9} - \frac{1}{6}$

e. $\frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$

c. $\frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 45 \times 100}$

f. $\frac{1}{5 - 3\sqrt{2}} + \frac{3 - 3\sqrt{2}}{7}$

Exercice 2. (☆)

Factoriser ou développer les expressions suivantes.

a. $(3x + 2)^3$

c. $(2x - 1)^4$

b. $x^4 - 1$

d. $8x^2 - 32$

e. $(2x - 6)(x + 2) - (x + 1)(x - 3) + 2x(3 - x)$

f. $(2x + 1)^3 + (2x + 1)^2 + 2x + 1$

Exercice 3. (☆)

Simplifier les expressions suivantes.

a. $\frac{x^{n+1}}{x}$

d. $\frac{1}{x^{1-n}}$

g. $\frac{x^{2n-1}}{(x^{n+1})^3}$

b. $\frac{y}{y^n}$

e. $\frac{(-3)^{2n-1}}{7^{4n+1}}$

c. $\frac{1}{z^{-n}}$

f. $\frac{3^{2n}5^{n-1}}{(-7)^{n+1}}$

Polynômes

Exercice 4. (★)

On considère le polynôme P défini par $P(X) = 3X^2 - X - 2$.

a. Montrer que 1 est une racine de P , et trouver un polynôme Q tel que $P(X) = (X - 1)Q(X)$.

b. Étudier le signe de P sur \mathbb{R} .

Exercice 5. (★)

Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 6X^2 + 7X - 6$, sachant qu'il admet deux racines évidentes.

Exercice 6. (★)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

e. $x = \sqrt{x} + 2$

b. $2x^2 - 12x + 18 = 0$

f. $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$

g. $(x^2 - 3x + 4)^2 = (x^2 + 2x - 5)^2$

d. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$

h. $(2x - 3)^2 = (7x + 5)^2$

Exercice 7. (★)

Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout x différent de 0, 1 et -1 , on ait :

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 1}$$

Exercice 8. (★★)

Déterminer les couples de réels (a, b) telles que :

a. $a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b$

b. $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$

c. $a^2 - 2ab - 3b^2 \geq 0$

Exercice 9. (☆)

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x :

$$m^2x + 2m = 9x - 6$$

On pourra discuter selon la valeur du paramètre m .

Exercice 10. (★★)

Même exercice pour l'équation suivante.

$$(m - 1)x^2 - 4(m - 2)x + 4m - 11 = 0$$

Exercice 11. (★)

Même exercice pour l'équation suivante.

$$mx^2 + (1 - m)x - 1 = 0$$

Exercice 12. (★★)

Pour quelles valeurs du paramètre réel m les trinômes $x^2 + 2x + m - 4$ et $x^2 + x - 7m + 1$ ont-ils une racine commune ?

Quelle est cette racine ?

Exercice 13. (★★)

Démontrer par l'absurde qu'un polynôme de degré 2 ne peut avoir 3 racines distinctes ou plus.

Équations, inéquations**Exercice 14. (★★)**

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

a. $x - 7 = \sqrt{x - 5}$

c. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 3} - \sqrt{3x - 1} = 0$

b. $\sqrt{2 - x} = x + 4$

d. $\sqrt{|x^2 - x + 6|} = x + 1$

Exercice 15. (★★)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

a. $\frac{5}{3 - x} = 3 - \frac{x + 4}{3}$

d. $\frac{2}{x - 3} = 3$

b. $x + 1 = \sqrt{\frac{x}{6} + 6}$

e. $x + \frac{2}{6 - \frac{3}{x - 1}} = 1$

c. $\frac{5}{3x - 2} = \frac{1}{x - 4}$

Exercice 16. (★★)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

a. $x + 2 \geq \sqrt{x + 5}$

d. $\sqrt{x + 3} < -x + 4$

b. $-x + 1 > \sqrt{3x^2 - 2x - 7}$

e. $\frac{2x - 3}{x^2 - 4} < 1$

c. $x - 2 \leq \sqrt{x - 1}$