CH XX : Variables aléatoires réelles discrètes

I. Variables aléatoires discrètes

I.1. Généralités sur les variables aléatoires discrètes

I.1.a) Rappel de la définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- La v.a.r. X est dite **discrète** si son support $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
- On dit que X est **finie** si $X(\Omega)$ infini.
  On dit que X est **infinie** si $X(\Omega)$ est un ensemble infini.

Remarque

- Le caractère au plus dénombrable de $X(\Omega)$ est à l'origine des spécificités des v.a.r. discrètes. La première conséquence est que l'on peut numéroter les éléments de $X(\Omega)$ *i.e.* l'écrire :

$$X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$$

  où I est un ensemble :
  × fini (*i.e.* que I peut être mis en bijection avec $[\![1, n]\!]$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$),
  × ou infini dénombrable (*i.e.* que I peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$).

- Rappelons que $\mathbb{Z}$ est un ensemble (infini) dénombrable puisque l'application φ suivante est une bijection :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ & & z & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} -2z & \text{si } z \text{ négatif} \\ 2z-1 & \text{si } z \text{ positif} \end{array} \right. \end{array}$$

  (*« il y a autant d'entiers relatifs que d'entiers naturels »*)

- De même, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles (infinis) dénombrables donc peuvent (en théorie) servir à indexer le support d'une v.a.r. discrète X.
- En pratique, les v.a.r. que nous étudions ont un support $X(\Omega)$ indexé par une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$ (voire de $\mathbb{Z}$).

$$X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\} \qquad \text{où } I \subset \mathbb{N}$$

Il faut faire attention à ne pas confondre les deux notions suivantes.

- Le suport $X(\Omega)$ est indexé par $\mathbb{N}$.
  Autrement dit : $X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.
- Le suport $X(\Omega)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  Par exemple, $X(\Omega) = \{3, 5, 7, 10, 11 \ldots\}$

On peut d'ailleurs préciser que :

$$X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad X \text{ est une v.a.r. discrète}$$

$$X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \quad \not\Leftarrow \quad X \text{ est une v.a.r. discrète}$$

Par exemple, si $X(\Omega) = \{1, \sqrt{2}, \mathrm{e}^6, 23\}$, alors :

× X est une v.a.r. discrète (puisque $X(\Omega)$ est un ensemble fini),
× $X(\Omega)$ n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$.

I.1.b) Système complet d'événements associé à une v.a.r. discrète

Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace probabilisable.*

Soit X *une variable aléatoire réelle discrète sur* $(\Omega, \mathscr{A})$.

Notons $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ *où* $I \subseteq \mathbb{N}$.

> La famille $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à X.**

Démonstration.
Il y a deux propriétés à démontrer.

1) $([X = x_i])_{i \in I}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles :

Soit $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$ et soit $\omega \in [X = x_i] \cap [X = x_j]$.
Cela signifie que :

× $\omega \in [X = x_i]$ donc $X(\omega) = x_i$,

× $\omega \in [X = x_i]$ donc $X(\omega) = x_j$.

Par définition, $x_i \neq x_j$.
On en conclut qu'il n'existe pas d'élément $\omega \in [X = x_i] \cap [X = x_j]$.
Ainsi $[X = x_i] \cap [X = x_j] = \varnothing$.

2) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} [X = x_i]$:

($\supset$) $\bigcup\limits_{i \in I} [X = x_i] \subset \Omega$ puisque $\bigcup\limits_{i \in I} [X = x_i]$ est un événement (en tant qu'union dénombrable d'événements).

($\subset$) Soit $\omega \in \Omega$.
Alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$.
Ainsi, il existe $i \in I$ tel que $X(\omega) = x_i$ *i.e.* $\omega \in [X = x_i]$. □

I.1.c) Loi d'une v.a.r. discrète

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- On appelle **loi de probabilité** de X et on note $\mathbb{P}_X$ l'application :

$$\mathbb{P}_X \ : \left| \begin{array}{ccl} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X = x]) \end{array} \right.$$

- Autrement dit, la loi de X est la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}([X = x])$ pour x décrivant $X(\Omega)$.

Remarque
Dans le cas d'une v.a.r. discrète **finie**, on pourra représenter la loi de X sous la forme d'un tableau.

Exemple
On considère l'expérience aléatoire consistant à observer le résultat d'1 lancer simulatné de 4 pièces de monnaie.

- $\Omega = \{P, F\}^4$.
- On munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
  ($(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisable)
  $\text{Card}(\Omega) = 2^4 = 16$.
- On note X la v.a.r. qui compte le nombre de P obtenu lors du lancer.
  $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$x \in X(\Omega)$	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}([X = x])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Remarque (POLY)

- Dans le cas où X est une v.a.r. discrète, nous avons vu que la loi de X est déterminée par la suite $(\mathbb{P}([X = x]))_{x \in X(\Omega)}$.
- Inversement, si l'on se donne une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans quel cas peut-on dire que cette suite est la loi d'une v.a.r. discrète ?

  Évidemment, il faut que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geqslant 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
  Cette condition est même suffisante.
  Plus précisément, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et une v.a.r. discrète X telle que $X(\Omega) \subseteq \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = x_n]) = p_n$.

I.1.d) Fonction de répartition d'une v.a.r. discrète

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ ($I \subseteq \mathbb{N}$).

Alors la fonction de répartition F_X est déterminée par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} \mathbb{P}([X = x_i])}$$

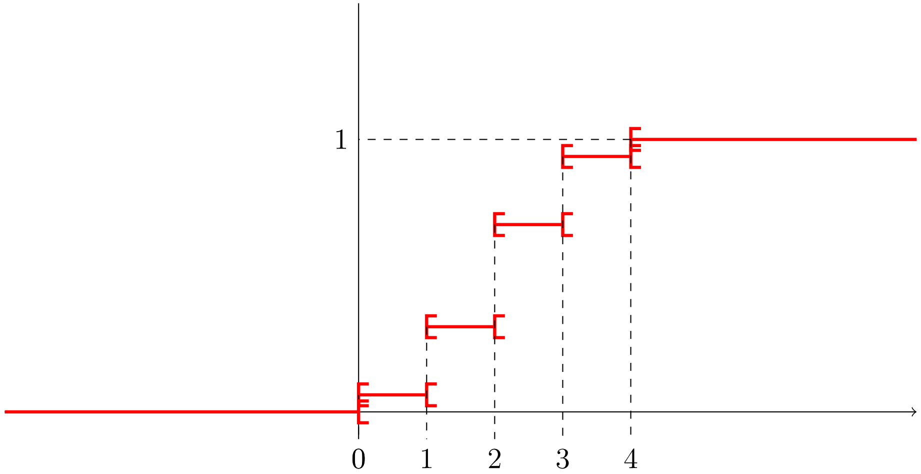
Démonstration.
On remarque tout d'abord que : $[X \leqslant x] = \bigcup\limits_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} [X = x_i]$.

($\subset$) Soit $\omega \in [X \leqslant x]$. Alors $X(\omega) \leqslant x$.
Or $X(\omega)$ est un élément du support de X donc s'écrit sous la forme x_i pour un certain $i \in I$.

($\supset$) Soit $\omega \in \bigcup\limits_{\substack{x_i \leqslant x \\ i \in I}} [X = x_i]$. Alors ω est un élément de l'un des événements $[X = x_i]$ avec $i \in I$ et $x_i \leqslant x$.
Ainsi, $X(\omega) = x_i \leqslant x$ et donc $\omega \in [X \leqslant x]$.

On a affaire à une union au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles. On obtient alors le résultat grâce à la σ-additivité de $\mathbb{P}$. $\square$

Exemple
On reprend l'exemple précédent. La fonction de répartition de la v.a.r. X comptant le nombre de P est donnée par le graphe suivant.



- On obtient une fonction constante par morceaux qui présente des sauts de discontinuité. Cette forme en escalier est **caractéristique** des fonctions de répartition des v.a.r. discrètes.
- Les contremarches (*i.e.* les sauts de discontinuité) ont pour hauteur les valeurs successives de $\mathbb{P}([X = x_i])$ (les x_i étant rangés dans l'ordre).

Théorème 3.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1) *Si X est fini i.e. $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors :* $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = x_i]) = 1$

2) *Si X est infini i.e. $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ alors :* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = x_i]) = 1$

3) *On peut résumer ces propriétés en notant :* $\boxed{\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1}$

Démonstration.
La famille $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
Autrement dit, ces événements sont donc deux à deux incompatibles et vérifient : $\Omega = \bigcup\limits_{x\in X(\Omega)} [X=x]$.

En appliquant $\mathbb{P}$ de part et d'autre, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in X(\Omega)} [X=x]\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

(on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$: le caractère dénombrable de $X(\Omega)$ est donc indispensable ici) □

Remarque
On retrouve ici la propriété $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ qui est vérifiée pour toute v.a.r. (discrète ou non).

Cas particulier des v.a.r. discrète à valeurs entières ($X(\Omega)\subseteq\mathbb{Z}$)

Proposition 1.
Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega,\mathscr{A})$ telle que $X(\Omega)\subseteq\mathbb{Z}$.
*(ceci siginifie que X est à **valeurs** dans $\mathbb{Z}$)*

$$\boxed{\forall k\in X(\Omega),\quad \mathbb{P}([X=k]) \ = \ F_X(k)-F_X(k-1)}$$

Démonstration.
On rappelle que : $\mathbb{P}([k-1<X\leqslant k]) = F_X(k)-F_X(k-1)$.
Or comme X est à valeurs entières, $[k-1<X\leqslant k] = [X=k]$. □

Remarque
Il faut savoir redémontrer cette propriété à chaque fois.

I.1.e) Opérations sur les v.a.r. discrètes

Théorème 4.
Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace probabilisable.
Soient X et Y deux v.a.r. discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{X+Y,\ \lambda X \ \textit{et}\ XY \ \textit{sont des v.a.r. discrètes.}}$$

où l'on a noté :
- $X+Y \ : \left|\begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{R}\\ \omega & \mapsto & X(\omega)+Y(\omega)\end{array}\right.$
- $\lambda X \ : \left|\begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{R}\\ \omega & \mapsto & \lambda X(\omega)\end{array}\right.$
- $XY \ : \left|\begin{array}{ccc}\Omega & \to & \mathbb{R}\\ \omega & \mapsto & X(\omega)\,Y(\omega)\end{array}\right.$

Démonstration.
Démontrons tout d'abord que $X+Y$, λY et XY sont des v.a.r.
(i) $X+Y$, λX et XY sont bien des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.
(ii) Admis.

Il reste alors à démontrer que ces v.a.r. sont discrètes, autrement dit que leur support est au plus dénombrable.
Les v.a.r. X et Y étant discrètes, on peut noter :
× $X(\Omega) = \{x_i \mid i\in I\}$ où $I\subseteq\mathbb{N}$,
× $Y(\Omega) = \{y_j \mid j\in J\}$ où $J\subseteq\mathbb{N}$.
Ainsi : $(\lambda X)(\Omega) = \{\lambda x_i \mid i\in I\}$. Comme $I\subseteq\mathbb{N}$, la v.a.r. λX est bien discrète.
D'autre part :

$$(X+Y)(\Omega) = \{x_i+y_j \mid (i,j)\in I\times J\}$$
$$\text{et } (XY)(\Omega) = \{x_iy_j \mid (i,j)\in I\times J\}$$

Or $I\times J$ est une partie de $\mathbb{N}^2$ donc est au plus dénombrable.
Ainsi, $X+Y$ et XY sont bien des v.a.r. discrètes. □

Remarque *(Structure de l'ensemble des v.a.r. discrètes)*
On peut démontrer que l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel (*cf* chapitre correspondant).
L'ensemble des v.a.r. discrètes :

- × est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$,
- × est stable par la loi $+$ et la loi $\cdot$ (c'est l'objet du théorème précédent).

Cela permet de démontrer que l'ensemble des v.a.r. discrète est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

I.1.f) Transformation d'une v.a.r. discrète

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

On notera $g(X)$ l'application composée $g \circ X$:

$$g(X) \; : \; \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array}$$

Théorème 5.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ $(I \subseteq \mathbb{N})$.

Soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

L'application $g(X)$ vérifie les propriétés suivantes.

1) $g(X)(\Omega) = \{g(x_i) \mid i \in I\}$.

2) $g(X)$ *est une v.a.r. discrète.*

3) $\boxed{\forall y \in g(X)(\Omega), \quad \mathbb{P}([g(X) = y]) = \sum\limits_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}([X = x_i])}$

Démonstration.

1) Par définition de $g(X)$, on a : $g(X)(\Omega) = g(X(\Omega)) = \{g(x_i) \mid i \in I\}$.

2) Le support de $g(X)$ est indéxé par $I \subseteq \mathbb{N}$, ensemble au plus dénombrable. On ne démontre pas le point ***(ii)***.

3) Soit $y \in g(X)(\Omega)$. Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} [g(X) = y] & = & \{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) = y\} \\ & = & \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \{x_i \mid i \in I \text{ et } g(x_i) = y\}\} \\ & = & \bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ g(x_i) = y}} [X = x_i] \end{array}$$

On obtient ainsi $[g(X) = y]$ comme union dénombrable d'événements deux à deux incompatibles. En effet, $\{i \in I \mid g(x_i) = y\} \subseteq I$ est au plus dénombrable et $[X = x_i] \cap [X = x_j] = \varnothing$ pour $i \neq j$. On a alors :

$$\mathbb{P}([g(X) = y]) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ g(x_i) = y}} [X = x_i] \right) = \sum\limits_{\substack{i \in I \\ g(x_i) = y}} \mathbb{P}([X = x_i])$$

□

Étude de la loi de $Y = g(X)$ sur quelques exemples.

Soit X une v.a.r. discrète. On considère la v.a.r. discrète $Y = g(X)$ pour les applications g suivantes.

1) Si $g : x \mapsto ax + b$ où $a \neq 0$.

Alors $Y(\Omega) = g(X)(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{ax + b \mid x \in X(\Omega)\}$
La loi de Y est donnée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$:

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = y]) = \mathbb{P}([aX + b = y]) = \mathbb{P}\left(\left[X = \frac{y - b}{a}\right]\right)}$$

En effet, si $\omega \in [aX + b = y]$ alors $aX(\omega) + b = y$ *i.e.* $X(\omega) = \dfrac{y - b}{a}$.

2) Si $g : x \mapsto x^2$.

Alors $Y(\Omega) = g(X)(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{x^2 \mid x \in X(\Omega)\}$.
Soit $y \in Y(\Omega)$.

- Supposons $y \neq 0$ et soit $\omega \in \Omega$.
$\omega \in [Y = y] \Leftrightarrow \omega \in \left[X^2 = y\right] \Leftrightarrow X(\omega)^2 = y$. Or :
$$X(\omega)^2 = y \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = \sqrt{y} \ \texttt{OU} \ X(\omega) = -\sqrt{y}$$
Ainsi, $\left[X^2 = y\right] = \left[X = \sqrt{y}\right] \cup \left[X = -\sqrt{y}\right]$.
La loi de Y est donnée par, pour tout $y \in Y(\Omega) \setminus \{0\}$:
$$\boxed{\mathbb{P}([Y = y]) = \mathbb{P}(\left[X^2 = y\right]) = \mathbb{P}([X = \sqrt{y}]) + \mathbb{P}([X = -\sqrt{y}])}$$
- Dans le cas $y = 0$, on obtient $\mathbb{P}([Y = 0]) = \mathbb{P}([X = 0])$.

3) Si $g : x \mapsto |x|$.

Alors $Y(\Omega) = g(X)(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{|x| \mid x \in X(\Omega)\}$.
Soit $y \in Y(\Omega)$.

- Supposons $y \neq 0$ et soit $\omega \in \Omega$.
$\omega \in [Y = y] \Leftrightarrow \omega \in [|X| = y] \Leftrightarrow |X(\omega)| = y$. Or :
$$|X(\omega)| = y \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = y \ \texttt{OU} \ X(\omega) = -y$$
Ainsi, $[|X| = y] = \left[X = \sqrt{y}\right] \cup \left[X = -\sqrt{y}\right]$ et :
$$\boxed{\mathbb{P}([Y = y]) = \mathbb{P}([|X| = y]) = \mathbb{P}([X = y]) + \mathbb{P}([X = -y])}$$
- Dans le cas $y = 0$, on obtient $\mathbb{P}([Y = 0]) = \mathbb{P}([X = 0])$.

4) Si $g : x \mapsto e^x$.

Alors $Y(\Omega) = g(X)(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\} = \{e^x \mid x \in X(\Omega)\}$.
Soit $y \in Y(\Omega)$. Comme $\omega \in \left[e^X = y\right] \Leftrightarrow e^{X(\omega)} = y \Leftrightarrow X(\omega) = \ln y$, la loi de Y est donnée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$ par :
$$\boxed{\mathbb{P}([Y = y]) = \mathbb{P}(\left[e^X = y\right]) = \mathbb{P}([X = \ln y])}$$

I.2. Espérance d'une variable aléatoire discrète

I.2.a) Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1) Si X est finie : et que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Dans ce cas, on appelle **espérance** de la v.a.r. X et on note $\mathbb{E}(X)$:
$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

2) Si X est infinie : alors $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
Dans ce cas, **si la série** $\sum x_n \ \mathbb{P}([X = x_n])$ **est absolument convergente**, on appelle **espérance** de la v.a.r. X et on note $\mathbb{E}(X)$:
$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

3) Sous réserve d'existence, l'espérance s'écrit donc :
$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{i \in I} x_i \ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

L'espérance est un moyenne pondérée : on somme chaque valeur possible pour X pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.

Remarque

L'espérance peut être pensée comme une généralisation de la notion de moyenne. Illustrons ce point avec l'exemple suivant.

- Expérience aléatoire : on observe le résultat d'1 lancer de dé à 6 faces.
- Univers des possibles : $\Omega = [\![1,6]\!]$.
- Notons X la v.a.r. discrète finie consistant à donner le résultat du lancer.
- $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ donc X est donc une v.a.r. discrète finie.

1) Dans un premier temps, munissons Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_1$.
La v.a.r. X étant finie, elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}_1([X=x]) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{6} k\ \mathbb{P}_1([X=k]) \\ & = & \dfrac{1}{6}\sum\limits_{k=1}^{6} k \ = \ \dfrac{1}{\cancel{6}}\ \dfrac{\cancel{6}(6+1)}{2} \ = \ 3,5 \end{array}$$

Le réel $3,5$ est la moyenne des résultats du lancer d'un dé équilibré (probabilité $\mathbb{P}_1$ prise en compte).

2) On munit maintenant Ω de la probabilité $\mathbb{P}_2$ telle que :

$$\mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{3}$$

La v.a.r. X étant finie, elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}_2([X=x]) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{6} k\ \mathbb{P}_2([X=k]) \\ & = & \sum\limits_{k=4}^{6} k\ \mathbb{P}_2([X=k]) \ = \ \dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=4}^{6} k \ = \ \dfrac{1}{\cancel{3}}\ \dfrac{\cancel{3}(4+6)}{2} \ = \ 5 \end{array}$$

Le réel 5 est la moyenne des résultats du lancer dans le cas de notre dé truqué (probabilité $\mathbb{P}_1$ prise en compte).

- Une v.a.r. discrète `FINIE` admet `TOUJOURS` une espérance.
- Une v.a.r. discrète `INFINIE` n'admet pas nécessairement une espérance. L'hypothèse de `CONVERGENCE ABSOLUE` est nécessaire pour la bonne définition de la notion d'espérance.

À quoi sert l'hypothèse de convergence absolue ?

Elle est nécessaire pour la bonne définition de la notion d'espérance. Il faut bien comprendre que la notation $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X=x])$ ne permet pas de savoir dans quel ordre sont sommés les éléments.
Il n'y paraît rien, mais c'est primordial comme l'énonce le résultat suivant.

Théorème 6. (CULTURE)
Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente.

$$i.e. \left\{ \begin{array}{l} \sum u_n \ \textit{converge} \\ \sum |u_n| \ \textit{diverge} \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Remarque

- Cet énoncé est parfois nommé théorème de réarrangement.
- Il signifie qu'étant donnée une série semi-convergente, on peut, en modifiant l'ordre de sommation, créer une série qui converge vers n'importe quel $\alpha \in \mathbb{R}$ choisit à l'avance (on peut même prendre $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$).
- Ce résultat est contraire à l'intuition : on ne s'attend pas à ce que la somme de tous les termes u_i dépende de l'ordre de sommation.
- Ceci ne se produit que sous l'hypothèse de semi-convergence.
L'hypothèse de convergence absolue est celle qui permet de parler de convergence d'une série indépendamment de l'ordre de sommation choisi.

I.2.b) Propriétés de l'espérance

Théorème 7.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux v.a.r. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
On suppose que X et Y admettent chacune une espérance.

L'opérateur espérance vérifie les propriétés suivantes.

1) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les v.a.r. $X+Y$ et λX admettent une espérance. De plus :*

$\boxed{\mathbb{E}(X+Y) \ = \ \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$ *et* $\boxed{\mathbb{E}(\lambda X) \ = \ \lambda \mathbb{E}(X)}$

(linéarité de l'espérance)

2) *Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la v.a.r. $aX+b$ admet une espérance. De plus :*

$\boxed{\mathbb{E}(a) \ = \ a}$ *et* $\boxed{\mathbb{E}(aX+b) \ = \ a\mathbb{E}(X) + b}$

3) $\boxed{X \ \geqslant \ 0 \ \Rightarrow \ \mathbb{E}(X) \ \geqslant \ 0}$ *(positivité de l'espérance)*

4) $\boxed{X \ \geqslant \ Y \ \Rightarrow \ \mathbb{E}(X) \ \geqslant \ \mathbb{E}(Y)}$ *(croissance de l'espérance)*

5) $$\boxed{\left.\begin{array}{l} X \geqslant 0 \\ \mathbb{E}(X) = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \mathbb{P}([X=0]) = 1}$$ *(X est presque sûrement nulle)*

Démonstration.
Soit X et Y deux v.a.r. discrètes.

1) Pour plus de simplicité, on se limite ici au cas des v.a.r. finies (cas infini analogue) et on admet la première égalité (démonstration un peu longue).

Démontrons la seconde égalité. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- Si $\lambda = 0$, la v.a.r. λX est nulle. Son espérance est $\mathbb{E}(0) = 0$.
- Si $\lambda \neq 0$, la v.a.r. λX a pour support $(\lambda X)(\Omega) = \{\lambda x_1, \dots, \lambda x_n\}$.
  Étant finie, cette v.a.r. admet une espérance, qui vaut :

$$\mathbb{E}(\lambda X) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \lambda x_i \ \mathbb{P}[\lambda X = \lambda x_i] \ = \ \lambda \sum_{k=1}^{n} x_i \ \mathbb{P}[X = x_i]$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Le réel a peut être vue comme une v.a.r. discrète. C'est la v.a.r. constante $X_a : \Omega \to \mathbb{R}$ qui vérifie $X_a(\omega) = a$ pour tout $\omega \in \Omega$.
Ainsi $X_a(\Omega) = \{a\}$. Comme X_a est finie, elle admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X_a) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X_a = x]) = a \ \mathbb{P}[X_a = a] = a \ \mathbb{P}(\Omega) = a$$

La seconde égalité est obtenue par linéarité :

$$\mathbb{E}(aX+b) = \mathbb{E}(aX) + \mathbb{E}(b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

3) Notons $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$.
La condition $X \geqslant 0$ signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$.
Autrement dit, $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ et pour tout $i \in I$, $x_i \geqslant 0$.

L'espérance $\mathbb{E}(X)$ est alors la somme d'une série à termes positifs (son terme général est $x_i \, \mathbb{P}[X = x_i]$). Elle est donc positive.

4) Notons tout d'abord que $X - Y$ admet une espérance (d'après ***1***).
On utilise alors le résultat précédent.
$X - Y \geqslant 0$ donc $\mathbb{E}(X-Y) \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)$.

5) Supposons que $X \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$.
Avec les mêmes notations que précédemment, on a donc $x_i \geqslant 0$.
Supposons $x_i > 0$. Alors nécessairement $\mathbb{P}[X = x_i] = 0$.
Si on suppose, par l'absurde, que cette probabilité est non nulle, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) \geqslant x_i \ \mathbb{P}[X = x_i] > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse.
Ainsi, pour tout i tel que $x_i \neq 0$, $\mathbb{P}[X = x_i] = 0$.
On a donc forcément $\mathbb{P}[X = 0] = 1$. □

Remarque

- La linéarité de l'espérance est une propriété logique puisque l'espérance est définie à l'aide d'un opérateur de sommation.
- On retiendra notamment que la somme de v.a.r. discrètes qui admettent une espérance, admet une espérance.

I.2.c) Théorème de transfert

Théorème 8. *Théorème de transfert*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

1) Si X est finie : et que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Dans ce cas, la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance de valeur :

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \ g(x_i) \ \mathbb{P}([X = x_i])}$$

2) Si X est infinie : et que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

La v.a.r. $g(X)$ admet une espérance	$\Leftrightarrow$	*La série de $\sum g(x_n) \ \mathbb{P}[X = x_n]$ est absolument convergente*

3) Sous réserve d'existence, on a donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \ g(x) \ \mathbb{P}([X = x])}$$

Démonstration.

1) $g(X)$ est une v.a.r. de support $g(X)(\Omega) = \{g(x_1), \dots, g(x_n)\}$
(abus de notation : les $g(x_i)$ ne sont pas forcément tous différents)

$g(X)$ étant finie, elle admet une espérance.

- Si tous les $g(x_i)$ sont différents. Alors $g(X)$ a pour espérance :

$$\mathbb{E}(g(X)) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \ g(x_i) \ \mathbb{P}([g(X) = g(x_i)]) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \ g(x_i) \ \mathbb{P}([X = x_i])$$

- Sinon, $g(X)(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$ avec $m < n$ et pour chaque y_j, il existe au moins un $i \in I$ tel que $y_j = g(x_i)$.
  Il s'agit alors de regrouper les x_i qui admettent la même image par g.
  On note alors $I_j = \{i \in I \mid g(x_i) = y_j\}$. On a :

$$\mathbb{E}(g(X)) \ = \ \sum_{j=1}^{m} \ y_j \ \mathbb{P}([g(X) = y_j])$$

Il suffit alors de remarquer : $[g(X) = y_j] = \bigcup\limits_{i \in I_j} \ [X = x_i]$.

Par σ-additivité, on a :

$$\begin{aligned} y_j \mathbb{P}([g(X) = y_j]) &= y_j \sum_{i \in I_j} \mathbb{P}([X = x_i]) = \sum_{i \in I_j} y_j \ \mathbb{P}([X = x_i]) \\ &= \sum_{i \in I_j} g(x_i) \ \mathbb{P}([X = x_i]) \end{aligned}$$

Et ainsi : $\mathbb{E}(g(X)) \ = \ \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i \in I_j} g(x_i) \ \mathbb{P}([X = x_i]) \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i) \mathbb{P}([X = x_i]$

2) Admis. □

I.2.d) Variable centrée

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- On dit que X est une **variable centrée** si X admet une espérance nulle.
- Si X admet une espérance, la v.a.r. $X - \mathbb{E}(X)$ est appellée variable centrée associée à X.

Remarque

Si X admet une espérance, la v.a.r. $X - \mathbb{E}(X)$ admet une espérance comme somme de v.a.r. discrètes admettant une espérance.
Cette v.a.r. est centrée puisque, par linéarité, on a :

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$$

I.2.e) Moments d'ordre r

Définition Moments d'ordre r

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

1) Si X est finie : et que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Dans ce cas, la v.a.r. X admet, pour tout $r \in \mathbb{N}$, un **moment d'ordre** r, noté $m_r(X)$:

$$\boxed{m_r(X) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^r \, \mathbb{P}([X = x_i])}$$

2) Si X est infinie : et que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $r \in \mathbb{N}$.
Dans ce cas, si la série $\sum x_n^r \, \mathbb{P}[X = x_n]$ est absolument convergente, on dit que la v.a.r. X admet un **moment d'ordre** r, noté $m_r(X)$:

$$\boxed{m_r(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^r \, \mathbb{P}([X = x_i])}$$

3) Sous réserve d'existence, on a donc :

$$\boxed{m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \, \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{E}(X^r)}$$

Remarque

- Si $r = 0$, on a $X^0 = 1$ et donc $m_0(X) = \mathbb{E}(1) = 1$.
- Si $r = 1$, on a $X^1 = X$ et donc $m_1(X) = \mathbb{E}(X)$.

Proposition 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

Si X admet un moment d'ordre r alors X admet un moment d'ordre s pour tout $s \in [\![1, r]\!]$.

I.3. Variance

I.3.a) Définition

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

- Si la v.a.r. X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))$ admet un moment d'ordre 2, on dit que X admet une variance, notée $\mathbb{V}(X)$:

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = m_2(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$$

- Sous ces hypothèses on appelle écart-type et on note $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Remarque

- Remarquons tout d'abord que la notion d'écart-type est bien définie.
Comme $((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant 0$, alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(((X - \mathbb{E}(X))^2) \geqslant 0$.
*(cf point **3)** du Théorème 7)*
- Par définition, la variance est le moment d'ordre 2 de la v.a.r. $X - \mathbb{E}(X)$ qui est la v.a.r. centrée associée à X.
La variance $\mathbb{V}(X)$ est donc le moment centré d'ordre 2 de la v.a.r. X.
- La variance est une mesure moyenne de l'écart existant entre X et $\mathbb{E}(X)$.
Mais pourquoi considérer un écart quadratique et pas un écart simple ?
Tout simplement car l'écart simple ne nous donne aucune information puisque, comme on l'a déjà souligné :

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \;=\; 0$$

- Il est alors naturel d'introduire l'écart-type (la racine de la variance) pour gommer le « défaut quadratique » introduit par ce choix d'écart.

Théorème 9. *Formule de Kœnig-Huygens*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r. discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une variance} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre } 2}$$

De plus, si X admet une variance, on a :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Supposons que X admet une variance.
On en déduit que X et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admettent une espérance. Or :

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 \;=\; X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2$$

Donc : $X^2 \;=\; (X - \mathbb{E}(X))^2 + 2\,\mathbb{E}(X)\,X - (\mathbb{E}(X))^2$.
La v.a.r. X^2 est la somme de v.a.r. discrètes qui admettent une espérance.
Elle admet donc une espérance.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si X admet un moment d'ordre 2, alors elle admet un moment d'ordre 1. Autrement dit, X admet une espérance.
L'égalité précédente démontre alors que $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance car est la somme de v.a.r. discrètes admettant une espérance.

Supposons maintenant que X admet une variance et démontrons la formule.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) & \\
& = & \mathbb{E}(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\,X + (\mathbb{E}(X))^2) & \\
& = & \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\,X) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X))^2) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 & \\
& = & \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 &
\end{array}$$

□

I.3.b) Propriétés de la variance

Théorème 10.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux v.a.r. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
On suppose que X et Y admettent chacune une variance.

L'opérateur variance vérifie les propriétés suivantes.

1) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les v.a.r. $X + Y$ et λX admettent une variance. De plus :*

$$\boxed{\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))}$$

$$\text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2\; \mathbb{V}(X)}$$

2) *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la v.a.r. $aX + b$ admet une variance. De plus :*

$$\boxed{\mathbb{V}(a) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X)}$$

3) $\boxed{\mathbb{V}(X) \;\geqslant\; 0}$

Démonstration.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On admet que $X + Y$ et λX admettent une variance.
D'après la formule de Kœnig-Huygens (et par linéarité de l'espérance) :

$$\begin{array}{cl}
& \mathbb{V}(X + Y) \\
= & \mathbb{E}((X + Y)^2) - (\mathbb{E}(X + Y))^2 \\
= & \mathbb{E}(X^2 + 2\,XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\
= & \mathbb{E}(X^2) + 2\,\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - ((\mathbb{E}(X))^2 + 2\,\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2) \\
= & \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 + +\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 + 2\,\mathbb{E}(XY) - 2\,\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
= & \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))
\end{array}$$

Toujours d'après la formule de Kœnig-Huygens et linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\lambda X) &= \mathbb{E}((\lambda X)^2) - (\mathbb{E}(\lambda X))^2 \\ &= \mathbb{E}(\lambda^2 X^2) - (\lambda\, \mathbb{E}(X))^2 \\ &= \lambda^2\, \mathbb{E}(X^2) - \lambda^2\, (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \lambda^2\, (\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2) \\ &= \lambda^2\, \mathbb{V}(X)\end{aligned}$$

2) Soit $(a, b \in \mathbb{R}^2)$. Par hypothèse, X admet une variance. Elle admet donc un moment d'ordre 2 et, par conséquent, un moment d'ordre 1.
Démontrons maintenant que la v.a.r. $(aX + b) - \mathbb{E}(aX + b)$ admet un moment d'ordre 2. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}((aX + b) - \mathbb{E}(aX + b))^2 &= (aX + b - (\mathbb{E}(aX) + \mathbb{E}(b)))^2 \\ &= (a\,(X - \mathbb{E}(X)) + \cancel{b} - \cancel{b})^2 \\ &= a^2\,(X - \mathbb{E}(X))^2\end{aligned}$$

Or, par définition de la variance de X, la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance. C'est donc aussi le cas de la v.a.r. $((aX+b) - \mathbb{E}(aX+b))^2$. En appliquant l'opérateur espérance dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}((aX+b) - \mathbb{E}(aX+b))^2 = \mathbb{E}(a^2\,(X - \mathbb{E}(X))^2) = a^2\,\mathbb{V}(X)$$

Au passage, dans le cas où $a = 0$, on démontre que $\mathbb{V}(b) = 0$.

3) $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant 0$ donc, d'après la propriété *3)* du Théorème 7 :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \geqslant 0$$

□

Remarque

- La variance est une mesure moyenne de l'écart entre la v.a.r. et sa moyenne. Dans le cas d'une v.a.r. qui ne varie pas (une v.a.r. constante *i.e.* un réel a), il est logique que la variance soit nulle ($\mathbb{V}(a) = 0$).
- Contrairement à l'espérance, l'opérateur de variance, défini à l'aide d'une élévation au carré, n'est pas linéaire.

I.3.c) Variables centrées réduites

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

a) Si X admet une espérance égale à 0 on dit que X est une variable centrée.

b) Si X admet une variance égale à 1 on dit que X est une variable réduite.

c) Si X admet une variance, la variable $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X.

Remarque

- Si X admet une variance, la v.a.r. centrée réduite associée à X est, comme son nom l'indique, centrée et réduite.
  Remarquons déjà que X^* admet une espérance et une variance car s'écrit sous la forme $aX + b$ avec $a = \frac{1}{\sigma(X)} \in \mathbb{R}$ et $b = -\frac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \in \mathbb{R}$.

  1) X^* est centrée car :

  $$\mathbb{E}(X^*) = a\,\mathbb{E}(X) + b = \frac{1}{\sigma(X)}\,\mathbb{E}(X) - \frac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} = 0$$

  2) X^* est réduite car :

  $$\mathbb{V}(X^*) = a^2\,\mathbb{V}(X) = \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 \mathbb{V}(X) = \frac{\mathbb{V}(X)}{(\sigma(X))^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X)} = 1$$

- On retiendra qu'à toute v.a.r. X qui admet une variance, on peut associer une v.a.r. X^* centrée réduite. Considérer de telles v.a.r. peut être intéressant : cela permet de simplifier les raisonnements.

II. Lois discrètes finies

Dans tout ce paragraphe, on étudie des v.a.r. discrètes finies. On pourra alors noter $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ le support de telles v.a.r. .

II.1. Loi certaine

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **une loi certaine** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \{m\}}$

  b) $\boxed{\mathbb{P}([X = m]) = 1}$

- On dira aussi que la v.a.r. X est **certaine**, égale à m.
- Si X est une v.a.r. discrète finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$:
  on dit que X suit une **loi quasi-certaine** si $\mathbb{P}([X = x_1]) = 1$.

Exemple
Les lois certaines (quasi-certaines) sont utilisées pour définir la loi de v.a.r. qui sont définies sur expériences aléatoires dont l'issue est sûre.

- On considère un dé pipé dont le résultat est toujours 6.
  L'expérience aléatoire consiste en un lancer de ce dé.
  On note X la v.a.r. donnant le résultat du dé.
  X suit une loi quasi-certaine ($X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et $\mathbb{P}([X = 6]) = 1$).
- On considère une urne contenant n boules de couleurs différentes qui sont toutes numérotées par le même chiffre 7.
  L'expérience consiste à effectuer un tirage dans cette urne.
  On note X la v.a.r. donnant le numéro de la boule sortie.
  Alors X suit la loi certaine de support $X(\Omega) = \{7\}$.

Remarque

- Le fait que $X(\Omega) = \{m\}$ implique que la v.a.r. X est constante égale à m.
- Au contraire, une v.a.r. X suivant une loi quasi-certaine n'est pas constante (puisqu'elle admet les valeurs x_1, ..., x_n). Elle est seulement $\mathbb{P}$-presque sûrement constante : $\mathbb{P}([X = x_1]) = 1$.
- Il faut bien comprendre que x_1 désigne un élément quelconque de $X(\Omega)$ (l'ensemble $X(\Omega)$ n'étant pas ordonné).

Théorème 11.

Soit X une v.a.r. discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine). Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}([X = m]) = 1$.

1) *Alors X admet une espérance et une variance.*

2) *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = m}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = 0}$.

Démonstration.
Soit X une v.a.r. discrète suivant une loi (quasi) certaine.

1) X admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
X^2 admet une espérance pour la même raison.
Ainsi X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

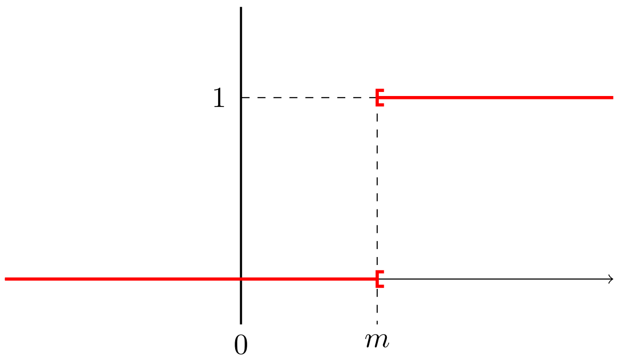
2) • $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}([X = x]) = m \, \mathbb{P}([X = m]) = m \times 1 = m$

• $$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}([X = x]) \\ &= (\cancel{m} - \cancel{\mathbb{E}(X)})^2 \, \mathbb{P}([X = m]) = 0 \end{aligned}$$

□

Fonction de répartition

Si X est une v.a.r. discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine) telle que $\mathbb{P}([X = m]) = 1$.



Proposition 3.

Soit X une v.a.r. discrète finie.

Alors on a : $\boxed{\mathbb{V}(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ suit une loi quasi-certaine}}$

Démonstration.
En effet, on a alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = 0$ avec $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant 0$. Ce qui prouve (propriété du cours précédent) que : $\mathbb{P}(\left[(X - \mathbb{E}(X))^2 = 0\right]) = 1$.
Il suffit alors de remarquer que

$$\left[(X - \mathbb{E}(X))^2 = 0\right] = [X - \mathbb{E}(X) = 0] = [X = \mathbb{E}(X)]$$

Ainsi, en notant $m = \mathbb{E}(X)$, on a $\mathbb{P}[X = m] = 1$.
Autrement dit, $X = m$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. □

Remarque

- Cette propriété est une équivalence : la réciproque est justifiée par le théorème précédent qui donne le calcul de $\mathbb{V}(X)$.
- Ainsi, la propriété $\mathbb{V}(X) = 0$ caractérise les v.a.r. X qui sont presque sûrement constantes et égales à leur moyenne.

II.2. Loi uniforme

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$

  b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{n}}$

- Plus généralement, si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, on dit qu'un v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![a, b]\!]}$

  b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{1}{b - a + 1}}$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.

Exemple

Les lois uniformes sont utilisées pour définir la loi de v.a.r. qui sont définies sur des expériences aléatoires qui consistent en 1 action (un tirage / un lancer) dont toutes les issues sont équiprobables.

- On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
  L'expérience consiste à tirer une boule.
  On note X la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée.
  Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$
- On considère une pièce équilibrée.
  L'expérience consiste en un jeu de pile ou face.
  On note X la v.a.r. égale à 1 si le lancer est P et 0 si le lancer donne F.
  Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$

Remarque

- Il s'agit bien de $\dfrac{1}{b-a+1}$ et non de $\dfrac{1}{b-a}$. En effet, il y a $b-a+1$ entiers entre a et b. Ce résultat est d'ailleurs cohérent avec le $\dfrac{1}{n}$ précédent.
- La loi uniforme sur $\mathcal{U}([\![m,m]\!])$ coïncide avec la loi certaine d'espérance m.

Théorème 12.

Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

2) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}}$

Démonstration.

1) X admet une variance (et donc une espérance) car c'est une v.a.r. finie.

2) • $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}([X=x]) = \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{\cancel{n}}\ \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$$

• $$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\ \mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{\cancel{n}}\ \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n+1}{12}(2\ (2n+1) - 3\ (n+1)) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}\end{aligned}$$ □

Théorème 13.

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a < b$.

Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

On note : $Y = X - a + 1$.

1) Alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,b-a+1]\!])$.

2) La v.a.r. X admet une espérance et une variance.

3) De plus : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}}$

Démonstration.

1) On a $Y(\Omega) = [\![1,b-a+1]\!]$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1,b-a+1]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}([Y=k]) = \mathbb{P}([X-a+1=k]) = \mathbb{P}([X=k+a-1]) = \frac{1}{b-a+1}$$

2) X admet une variance (et donc une espérance) car c'est une v.a.r. finie.

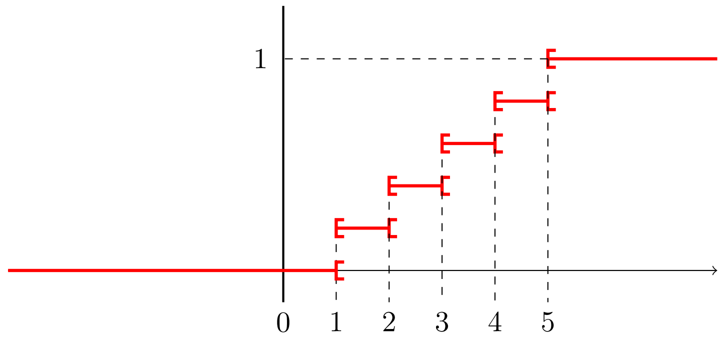
3) Comme $Y = X - a + 1$, on a $X = Y + a - 1$. On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(a-1) = \frac{(b-a+1)+1}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12} = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$ □

Fonction de répartition

Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1,5]\!])$.



II.3. Loi de Bernoulli

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \{0,1\}}$

  b) $\boxed{\mathbb{P}([X=1]) = p}$ et $\boxed{\mathbb{P}([X=0]) = 1-p} = q$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour signifier que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemple

Considérons une expérience aléatoire possédant deux issues qui ne sont pas forcément équiprobables. L'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ; l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$. Alors la v.a.r. X égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec (*i.e.* calculant le nombre de succès) suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

- On considère l'expérience du jeu de P ou F où l'obtention de P est considéré comme le succès de l'expérience.

  La v.a.r. qui vaut 1 si P est obtenu et 0 sinon suit la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

  Dans ce cas, cette loi coïncide avec la loi uniforme $\mathcal{U}([\![0,1]\!])$.
  Si P est obtenu avec probabilité p, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

- On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
  L'expérience consiste à tirer une boule.
  On note X la v.a.r. de valeur 1 si on tire une boule rouge et 0 si on tire une boule verte.
  Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{r+v}\right)$

Remarque

- Généralement, les cas $p=0$ et $p=1$ sont écartés : ils correspondent à une loi quasi-certaine.
- Si X suit une loi de Bernoulli, alors $X(\Omega) = \{0,1\}$. On en déduit que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $X^r = X$ (c'est notamment vrai pour le cas $r=2$).

Théorème 14.

Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ($p \in]0,1[$).

1) *Alors X admet une espérance et une variance.*

2) *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = p}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = p\,q} = p\,(1-p)$

Démonstration.

1) X admet une variance (et donc une espérance) car c'est une v.a.r. finie.

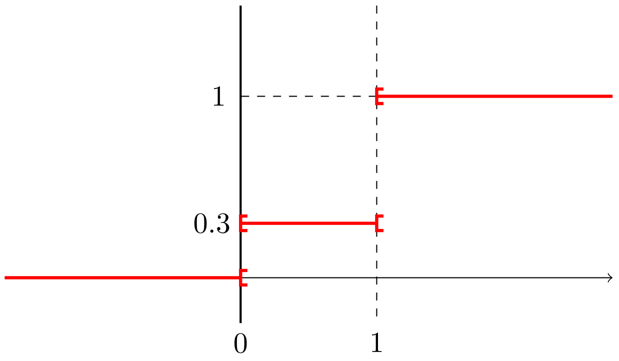
2) • $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}([X=x]) = 0\, \mathbb{P}[X=0] + 1\, \mathbb{P}[X=1] = p$

• $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2$

□

Fonction de répartition

Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0.7)$.



II.4. Loi binomiale

Définition

- On dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n, p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!]}$

  b) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$ avec $q = 1 - p$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ pour signifier que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

Exemple

On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession de n épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1-p$. Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer n épreuves de Bernoulli identiques (*i.e.* de même paramètre) et indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres). Alors la v.a.r. donnant le nombre de succès de l'expérience suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

- On considère l'expérience du jeu de P ou F où l'obtention de P est obtenue avec probabilité p (et F avec probabilité $1 - p$).
  L'expérience consiste en n répétitions de ce jeu de pile ou face.
  On note X la v.a.r. égale au nombre de P obtenus lors de l'expérience.
  Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
- On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
  L'expérience consiste à tirer **successivement** n boules **avec remise**.
  On note X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges tirées.
  Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{r}{r+v}\right)$

Remarque

- Évidemment, si une variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.
- On retrouve la formule du binôme de Newton.
  Considérons l'expérience précédente (tirage successif avec remise de n boules).
  Comme $([X = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ est le système complet d'événements associé à X :
  $$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = k]) = 1 \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{r}{r+v}\right)^k \left(\frac{v}{r+v}\right)^{n-k} = 1.$$
  On en conclut : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k\, v^{n-k} = (r+v)^n}$

Théorème 15.

Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$).

1) *Alors X admet une espérance et une variance.*

2) *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = n\, p}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = n\, p\, q} = n\, p\, (1-p)$

Démonstration.

1) X admet une variance (et donc une espérance) car c'est une v.a.r. finie.

2)
- $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}([X = x]) = \sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

  Or, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. On en déduit :
  $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-(k+1)} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{(n-1)-k} = np\,(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$
  car $p + q = 1$.
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. On commence donc par calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
  $\mathbb{E}(X^2) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x^2\, \mathbb{P}([X = x]) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Or, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Ainsi : $k^2\binom{n}{k} \;=\; k\ n\binom{n-1}{k-1} \;=\; n\ k\binom{n-1}{k-1}$.

Afin de pouvoir se débarraser du k restant, on remarque : $k = (k-1)+1$. On en déduit alors que, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$\begin{aligned} n\ k\binom{n-1}{k-1} &= n\ (k-1)\binom{n-1}{k-1} + n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\ (n-1)\binom{n-2}{k-2} + n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\ (k-1)\binom{n-1}{k-1}\ p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\ p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (k-1)\binom{n-1}{k-1}\ p^k q^{n-k} +\ np \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (n-1)\binom{n-2}{k-2}\ p^k q^{n-k} +\ np \\ &= n\ (n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\ p^{k+2} q^{n-(k+2)} +\ np \\ &= n\ (n-1)\ p^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\ p^k q^{(n-2)-k} +\ np \\ &= n\ (n-1)\ p^2 + np \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = n\ (n-1)\ p^2 + np - (np)^2 \\ &= \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2} = n\ (p - p^2) = n\ p\ (1-p) \end{aligned}$$ □

Proposition 4.
Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$). Alors $n - X$ suit la loi binomiale de paramètre (n, q).

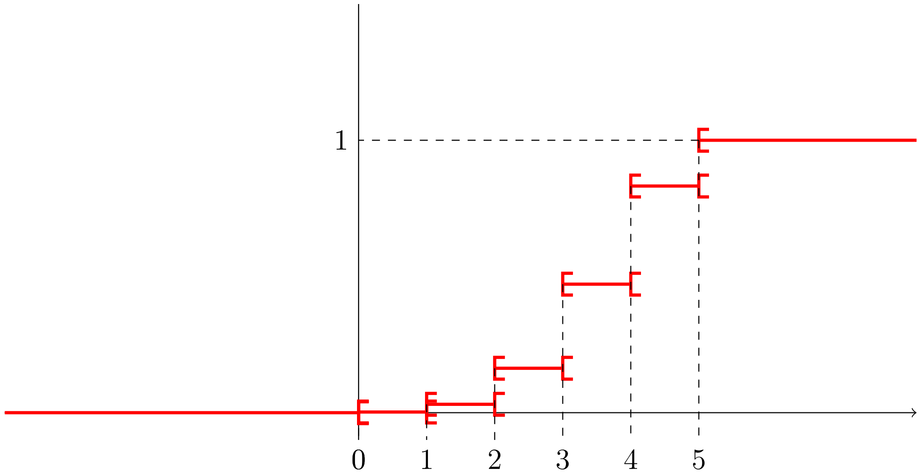
Démonstration.
Notons $Y = n - X$. On a alors :

a) $Y(\Omega) = \{n - x \mid x \in X(\Omega)\} = \{n, n-1, \dots, 1, 0\} = [\![0, n]\!]$.

b) $$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, n]\!],\quad \mathbb{P}([Y = k]) &= \mathbb{P}([n - X = k]) = \mathbb{P}([X = n-k]) \\ &= \binom{n}{n-k}\ p^{n-k} q^{n-(n-k)} = \binom{n}{k}\ q^k p^{n-k} \end{aligned}$$

□

Fonction de répartition
Si X est une v.a.r. discrète finie suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(5, .7)$.



II.5. Loi hypergéométrique (BONUS)

Définition

- Soit $(N, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 \leqslant n \leqslant N$ et soit $p \in]0,1[$ $(q = 1 - p)$.
- On dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi hypergéométrique** de paramètre (N, n, p) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [\![\max(0, n - Nq), \min(n, Np)]\!]}$

  b) $\forall k \in [\![\max(0, n - Nq), \min(n, Np)]\!]$,

$$\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ pour signifier que X suit la loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p).

Exemple

- On considère une urne qui contient a boules blanches et b boules noires.
  L'expérience consiste à tirer **simultanément** n boules dans l'urne (on suppose $n \leqslant a + b$).
  On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues.
  Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{H}\left(a + b, n, \dfrac{a}{a + b}\right)$.

  Autrement dit, on a :

$$\forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

  (ici, $N = a + b$ et $p = \dfrac{a}{a + b}$ d'où $Np = a$ et $Nq = b$)

- On considère une urne qui contient a boules blanches et b boules noires.
  L'expérience consiste à tirer **successivement** et **sans remise** n boules dans l'urne (on suppose $n \leqslant a + b$).
  On note X la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues.
  Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{H}\left(a + b, n, \dfrac{a}{a + b}\right)$

  Autrement dit, pour ces deux expériences a priori différentes, la v.a.r. donnant le nombre de boules blanches suit la même loi géométrique.

Remarque

- On retrouve la formule de Vandermonde.
  Considérons l'une ou l'autre des expériences précédentes.
  On suppose de plus que $a \geqslant n$ et $b \geqslant n$ de sorte que :
  $[\![\max(0, n - Nq), \min(n, Np)]\!] = [\![0, n]\!]$.

  Comme $([X = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ est le système complet d'événements associé à X :
  $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = k]) = 1$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} = 1$.

  On en conclut : $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}}$

Théorème 16.

Soit X une v.a.r. discrète finie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ (avec $1 \leqslant n \leqslant N$, $p \in]0,1[$).

1) *X admet une espérance et une variance.*

2) *De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(X) = n\ p}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = n\ p\ q\ \dfrac{N - n}{N - 1}}$

Démonstration.

1) X admet une variance (et donc une espérance) car c'est une v.a.r. finie.

2) Admis.

$\square$

III. Lois discrètes infinies

III.1. Loi géométrique

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

  b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = p\, q^{k-1}}$ avec $q = 1 - p$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour signifier que X suit la loi géométrique de paramètre p.

Exemple

On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves indépendantes, chacune d'entre elles ayant deux issues : succès obtenu avec probabilité p et échec obtenu avec probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, l'expérience consiste à effectuer une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques (même paramètre) et indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres). Alors la v.a.r. donnant le rang d'apparition du premier succès de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p.

- On considère l'expérience du jeu de P ou F où l'obtention de P est obtenue avec probabilité p (et F avec probabilité $1 - p$).
  L'expérience consiste à répéter indéfiniment ce jeu de pile ou face.
  On note X la v.a.r. égale au rang d'apparition du premier P.
  Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
- On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
  L'expérience consiste au tirage infini d'une boule avec remise.
  On note X la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la première boule rouge. Alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{r}{r+v}\right)$

Théorème 17.

Soit X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0,1[$). Alors :

1) *La v.a.r. X admet une espérance et une variance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}} = \dfrac{1-p}{p^2}$

Démonstration.

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = n]) = p\, q^{n-1}$.

La v.a.r. X admet une espérance si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\, p\, q^{n-1}$ est absolument convergente. Or :

- $|n\, p\, q^{n-1}| = |n|\,|p|\,|q^{n-1}| = n\, p\, q^{n-1}$,
- $n\, q^{n-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée première de raison q vérifiant $0 < q < 1$.

On en conclut que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\, q^{n-1}$ est absolument convergente et donc que X admet une espérance. Calculons $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\, p\, q^{n-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} n\, q^{n-1} \\ &= p\, \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

2) $X^2(\Omega) = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = n]) = p\, q^{n-1}$.

X admet une variance si X admet un moment d'ordre 2 *i.e.* si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^2\, p\, q^{n-1}$ est absolument convergente. Or :

- $|n^2\, p\, q^{n-1}| = n^2\, p\, q^{n-1}$,
- $n^2\, q^{n-1} = (n(n-1) + n)\, q^{n-1} = n(n-1)\, q^{n-1} + n\, q^{n-1}$.

Le terme général $n^2 q^{n-1}$ apparaît comme la somme de :

× $n(n-1)\, q^{n-1}$, qui est le terme général d'une série géométrique dérivée seconde de raison q vérifiant $0 < q < 1$,

× $n\, q^{n-1}$, qui est le terme général d'une série géométrique première de raison q vérifiant $0 < q < 1$.

On en conclut que la v.a.r. X admet une variance.

Calculons $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de la formule de Kœnig-Huygens.

- Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\, p\, q^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1)+n)\, q^{n-1} \\
&= p\, q \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\, q^{n-2} + p \sum_{n=1}^{+\infty} n\, q^{n-1} \\
&= p\, q\, \frac{2}{(1-q)^3} + p\, \frac{1}{(1-q)^2} \\
&= \frac{2\, q}{p^2} + \frac{p}{p^2} \\
&= \frac{2\,(1-p)}{p^2} + \frac{p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}
\end{aligned}$$

- D'autre part : $(\mathbb{E}(X))^2 = \left(\dfrac{1}{p}\right)^2 = \dfrac{1}{p^2}$

Ainsi : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{2-p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$.

□

Proposition 5.

Soit X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $(p \in]0,1[)$.

Alors pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$:

1) $\boxed{\mathbb{P}([X > k]) = q^k}$

2) $\boxed{\mathbb{P}([X > k+\ell]) = \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])}$

Démonstration.

Soit $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$.

1) On remarque tout d'abord que : $[X > k] = \bigcup\limits_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$.

Ainsi, par σ-additivité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X > k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{n} [X = i]\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}([X = i]) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k+1}^{n} p \times q^{i-1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} p \sum_{i=k+1}^{n} q^{i-1} = \lim_{n\to+\infty} p \sum_{i=k}^{n-1} q^{i} \\
&= \lim_{n\to+\infty} p \times \frac{q^k - q^n}{1-q}
\end{aligned}$$

Enfin : $p \times \dfrac{q^k - q^n}{1-q} = q^k - q^n$.

Comme $0 < n < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ et on obtient le résultat souhaité.

2) D'après le point précédent :

$$\mathbb{P}([X > k+\ell]) = q^{k+\ell} = q^k \times q^\ell = \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([X > \ell])$$ □

Remarque
Comme $[X > k+\ell] \subseteq [X > k]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+\ell]) = \frac{\mathbb{P}([X > k+\ell])}{\mathbb{P}([X > k])} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbb{P}([X > \ell])$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $X > k$ est oubliée) ou encore que la loi géométrique **est sans mémoire**.

III.2. Loi de Poisson

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$

  b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}([X = k]) = \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}}$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour signifier que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

Exemple
Le `BO` suggère d'introduire la loi de Poisson comme loi limite.
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. On a alors, pour tout $k \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{\lambda^k}{n^k}\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\ \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous aux termes de ce produit.

- $\dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
  En effet, ce terme est un quotient de polynômes en n. Sa limite en $+\infty$ est donc la limite du rapport des monômes de plus haut degré. Il suffit alors de remarquer que le terme de plus haut degré du numérateur est n^k.
- Notons $u_n = \left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $\ln u_n = n \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

  On peut alors écrire :

  $$\ln u_n = \cancel{n} \times \left(-\frac{\lambda}{\cancel{n}}\right) \times \frac{\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}{-\frac{\lambda}{n}} = -\lambda \ \frac{\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}{-\frac{\lambda}{n}}$$

  Or on sait que : $\dfrac{\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}{-\frac{\lambda}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

  C'est en effet une instance de la propriété : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
  (c'est la limite d'un taux d'accroissement ...)
  D'où : $\ln u_n \to -\lambda$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$.

- Enfin, comme $1 - \dfrac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])}$$

où X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.
Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

Théorème 18.

Soit X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Alors :

1) La v.a.r. admet une espérance et une variance.

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(X) = \lambda}$

Démonstration.
On donne seulement le schéma de la démonstration. L'existence de l'espérance est assurée par le fait que ces quantités s'écrivent à l'aide de la série exponentielle.

- Déterminons tout d'abord $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \ \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda \ \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \ \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

- On détermine $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de la formule de Kœnig-Huygens, à savoir $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
  Calculons tout d'abord $\mathbb{E}(X^2)$.

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \ \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \ k^2 \ \frac{\lambda^k}{k!}$$

Afin de terminer ce calcul, on écrit k^2 sous la forme :

$$k^2 = k(k-1) + k$$

et on fait alors apparaître deux fois la somme de la série exponentielle . □

Exemple

- Dans le cas d'une loi de Poisson, nous n'avons pas d'exemple type à base de lancers de pièces de monnaie ou de tirage de boules dans une urne.
- La loi de Poisson est généralement utilisée comme loi de v.a.r. consistant à calculer le nombre d'événements d'un certain type se produisant sur un laps de temps donné.
  Cette modélisation est valide si :
  1) les événements se produisant sont indépendants,
  2) la probabilité d'apparition du phénomène dans un laps de temps donné T ne dépend que de cette durée T.

  Par exemple :

  a) On considère une autoroute pour laquelle il y a en moyenne 1.8 accidents par semaine. On note X la v.a.r. donnant le nombre d'accidents par semaine sur cette autoroute.
  On a alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1.8)$.
  (notez que λ n'est pas forcément entier)

  b) On considère un livre contenant des fautes d'impression. On sait de plus qu'il y a en moyenne 0.8 faute d'impression par page.
  On note X le nombre de fautes d'impression sur une page de ce livre.
  On a alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(0.8)$.

  c) On considère un serveur téléphonique qui reçoit en moyenne trois appels toutes les minutes.
  On note X le nombre d'appels reçus par le serveur en une minute.
  On a alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(3)$.