Feuille d'exercices n°20 : Variables aléatoires réelles discrètes

Loi, espérance et variance de X v.a.r. discrète finie

Exercice 1. (★)
Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$.
Si elle est discrète finie, donner la loi de X sous forme de tableau et tracer sa fonction de répartition.

a. X_1 est le nombre de « piles » obtenus en lançant quatre pièces de monnaie.

b. X_2 est le minimum de deux dés à six faces.

c. X_3 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche (on tire sans remise des boules dans une urne contenant 4 boules noires et 2 boules blanches).

d. X_4 est le produit de 4 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

Exercice 2. (★)
Pour chacune des variables aléatoires de l'exercice précédent, calculer les moments d'ordre 1, 2 et 3, et donner espérance et variance.

Exercice 3. (★)
Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame coûte 1 point. Du paquet on tire simultanément et au hasard 2 cartes. On désigne par X la v.a.r. discrète égale au total des points marqués.

- Calculer la loi de X, son espérance et son écart type.

Exercice 4. (★)
On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

- Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5. (★)
Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de champagne. On fixe un entier $1 \leqslant n \leqslant 25$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de champagne découvertes.

- Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 6. (★)
Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'une équipe arrive en retard à la suite d'un appel est $p = 1/4$.

1) Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi.

   a. Reconnaître la loi de probabilité de X.

   b. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2) On considère un ensemble de 8 clients différents, 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.

   a. Quelle est la loi de M ? L'expliciter sous forme de tableau.

   b. Calculer $E(M)$.

Loi hypergéométrique

Exercice 7. (★)
Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules vertes. On pioche simultanément 6 boules et on note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.

- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de R (resp. V).

Exercice 8. (★)
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

1) On suppose que les tirages sont sans remise.

   a. Déterminer la loi de B (resp. N).

   b. Calculer $\mathbb{E}(B)$, $\mathbb{V}(B)$ (resp. $\mathbb{E}(N)$, $\mathbb{V}(N)$).

2) Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 9. (★)
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement avec remise 5 boules. Chaque fois qu'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il perd 3 points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.

a. Déterminer la loi de X, puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

b. Exprimer Y en fonction de X.

c. En déduire la loi de Y, puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

d. Que deviennent les résultats précédents si le jeu est sans remise ?

Lois discrètes infinies

Exercice 10. (☆)
On effectue des lancers d'une pièce équilibrée.
On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir pile.
Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

Exercice 11. (★)
On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces.
On jette un premier dé et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.
Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

a. Établir la loi de probabilité de X.

b. Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 12. (★)
On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes.
On appelle X la v.a.r. dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) En utilisant une approximation (que l'on justifiera) calculer les probabilités des événements suivants.

   a. Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.

   b. Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Connaître les caractéristiques des lois usuelles

Exercice 13. (☆)
Calculer l'espérance et la variance des lois suivantes :

a. $\mathcal{U}(\{-5,\dots,10\})$ ***b.*** $\mathcal{B}\left(20, \frac{3}{7}\right)$ ***c.*** $\mathcal{H}\left(39, 7, \frac{1}{3}\right)$

Transformation d'une v.a.r. X

Exercice 14. ($\bigstar$)
Soient $p \in]0,1[$ et X une v.a.r. dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([X=-1]) = \frac{p}{2}, \qquad \mathbb{P}([X=0]) = 1-p, \qquad \mathbb{P}([X=1]) = \frac{p}{2}$$

Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 15. ($\bigstar$)
Soient $p \in]0,1[$ et X une v.a.r. tel que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1-p)$.
Déterminer la loi de $Y = \min(X^2, 2X)$.

Loi d'une somme, d'un max, d'un min

Exercice 16. ($\bigstar\bigstar$) *(Loi de la somme de deux v.a.r. discrètes)*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Notons Z la v.a.r. définie par $Z = X + Y$.

1) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$.

a. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ [X+Y=k] \ = \ \bigcup_{\ell=0}^{k} [X=\ell] \cap [Y=k-\ell]$$

b. Déterminer la loi de Z.

2) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

a. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ [X+Y=k] \ = \ \bigcup_{\ell=1}^{k-1} [X=\ell] \cap [Y=k-\ell]$$

b. Déterminer la loi de Z.

Exercice 17. ($\bigstar$)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes.
On admet que, pour tout $n \geqslant 2$, $X_1 + \ldots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.
On suppose que $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad S_n* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

a. Montrer que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.
(on pourra utiliser le résultat de l'exerice 16)

b. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

c. Déterminer l'espérance et la variance de S_n^*.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([S_n^* \leqslant 0]) = \mathrm{e}^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

Exercice 18. ($\bigstar\bigstar$)
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Notons $Z = \min(X+Y)$ et $T = \max(X,Y)$.

1. **Préliminaire.**
Soient $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que : $z = \min(x,y)$ et $t = \max(x,y)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{R}$:

a) $z \leqslant n \ \Leftrightarrow \ (x \leqslant n \ \texttt{OU} \ y \leqslant n)$

b) $t \leqslant n \ \Leftrightarrow \ (x \leqslant n \ \texttt{ET} \ y \leqslant n)$

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ où p et q sont des réels de $]0,1[$.

2. *a)* Déterminer $\mathbb{P}([X \leqslant n])$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer alors $\mathbb{P}([Z \leqslant n])$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire $\mathbb{P}([Z = n])$ pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Reconnaître alors une loi usuelle.

3. *a)* Déterminer $\mathbb{P}([T \leqslant n])$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer alors $\mathbb{E}(T)$.

Théorème de transfert

Exercice 19. (★)
Soit X une v.a.r. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Déterminer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
(on pourra utiliser la formule : $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$*)*

Exercice 20. (★)
Soit X une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Fonction génératrice

Exercice 21. (★★)
Soit X une variable aléatoire discrète. On définit la *fonction génératrice* G associée à X par :

$$G(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k)\ t^k$$

pour tous les réels x tels que la série converge (si convergence il y a).

Calculer la fonction génératrice de X dans les cas suivants :

a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ où $p \in]0,1[$.

b. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

d. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$.

e. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Sujet de concours

Exercice 22. (★★★) *(Ecricome 2008)*
Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant une probabilité $1/N$ de tomber dans chacune des N cases (et les lancers de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n, égale au nombre de cases non vides après n lancers.

a. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.

b. Donner les lois de T_1 et de T_2.

c. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $\mathbb{P}(T_n = 1)$, $\mathbb{P}(T_n = 2)$ et $\mathbb{P}(T_n = n)$ (en distingant suivant que $n \geqslant N$ ou $n > N$).

d. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) \ = \ \frac{k}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k-1)$$

e. On considère dans les questions qui suivent le polynôme

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)x^k$$

Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

f. Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.

g. En utilisant la relation démontrée à la question ***d.***, montrer que

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + x\,G_n(x)$$

h. Dériver l'expression précédente et en déduire que

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1$$

i. Prouver enfin que : $\quad \mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$

et déterminer la limite de $\mathbb{E}(T_n)$ quand n tend vers $+\infty$.