CH XXI : Variables aléatoires réelles à densité

I. Généralités sur les v.a.r. à densité

I.1. Les v.a.r. à densité

Définition
On dit qu'une v.a.r. X **est à densité** si sa fonction de répartition F_X est :

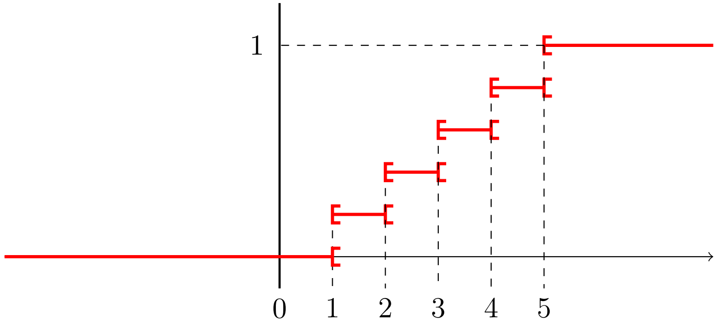
a) continue sur $\mathbb{R}$,

b) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Remarque

- Rappelons tout d'abord le rôle central joué par les fonctions de répartition des v.a.r. . La fonction de répartition F_X caractérise la loi de X : connaître F_X c'est connaître la loi de X et inversement.
- Démontrer qu'une v.a.r. X est à densité c'est donc montrer la régularité d'une fonction (à savoir F_X).
- Dire que f est C^1 sauf en un nombre fini n de points signifie qu'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
(on considère que les points sont ordonnés : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$)
f est C^1 sur $]-\infty, x_1[$, $]x_n, +\infty[$ et sur tout $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$
i.e. f est C^1 sur $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_1, x_2[\ \cup \dots \cup\ ]x_{n-1}, x_n[\ \cup\ ]x_n, +\infty[$.
- Il faut faire attention : si X admet une densité alors F_X n'est (éventuellement) pas C^1 en les x_i mais est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Donc F_X est notamment C^0 en les x_i.

Exemple
Une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 5]\!])$ admet-elle une densité ?
Rappelons la fonction de répartition d'une telle v.a.r.



- Ici, F_X est bien C^1 sur $]-\infty, 1[\ \cup\ ]1, 2[\ \cup\ ]2, 3[\ \cup\ ]3, 4[\ \cup\ ]4, 5[\ \cup\ ]5, +\infty[$.
- Par contre, F_X n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car non continue en les x_i.

Ainsi, si une v.a.r. **discrète finie** suit une loi uniforme, alors X n'admet pas de densité.

Remarque

- On rappelle que la forme en escalier est caractéristique des fonctions de répartition des v.a.r. discrètes. La hauteur des contremarches est égale aux valeurs successives des $\mathbb{P}([X = x])$, pour $x \in X(\Omega)$.
- Rappelons alors que : F_X est continue en $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbb{P}([X = x]) = 0$.
Cela permet de tirer la conclusion suivante :

$$\boxed{X \text{ est une v.a.r. discrète} \quad \Rightarrow \quad X \text{ n'admet pas de densité}}$$

La définition de v.a.r. admettant une densité étant établie, il nous reste à définir la notion de densité elle-même.

I.2. Densité d'une v.a.r.

Définition

Soit X une v.a.r. admettant une densité.

On dit qu'une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **une densité de** X si :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f_X(x) \geqslant 0$,

b) f_X coïncide avec F' sauf en un nombre fini de points.
Autrement dit, il existe $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad f_X(x) \ = \ F_X'(x)$$

Remarque

- Pour faliciter les démonstrations, et sans perte de généralité, on notera les points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de manière ordonnée *i.e.* tel que :

$$x_1 \ < \ \ldots \ < \ x_n$$

- D'où vient le caractère positif de f_X ?
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_X(x) = F_X'(x)$ pour tout $x \in]x_1, x_2[$.
Comme F_X est une fonction de répartition, elle est croissante sur $\mathbb{R}$ (et donc a fortiori sur $]x_1, x_2[$). Or on a :

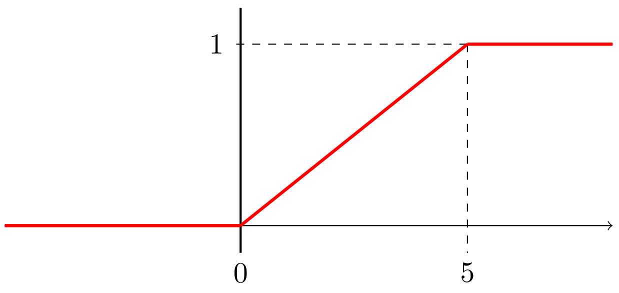
$$F_X \text{ croissante sur }]x_1, x_2[\quad \Leftrightarrow \quad F_X' = f_X \geqslant 0 \text{ sur }]x_1, x_2[$$

On montre ainsi que : $f_X \ \geqslant \ 0$ sur $]x_1, x_2[\ \cup \ \ldots \ \cup \ ]x_{n-1}, x_n[$.

- De par la définition, si X admet une densité, alors X admet une infinité de densité. En effet, la définition ne contraint pas précisément la valeur de f_X en les x_i. La seule exigence est que $f_X(x_i) \geqslant 0$.

Exemple

Considérons une v.a.r. X dont la fonction de répartition F est la suivante.



Cela correspond à la fonction $F : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x/5 & \text{si } x \in [0, 5] \\ 1 & \text{si } x \in]5, +\infty[\end{array} \right.$

- Tout d'abord, remarquons que cette fonction vérifie bien les propriétés caractéristiques des fonctions de répartitions.
  - $\times$ F est croissante sur $\mathbb{R}$,
  - $\times$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
  - $\times$ F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- De plus, la v.a.r. X est bien une v.a.r. à densité puisque :

  1) F est continue sur $\mathbb{R}$,

  2) F est C^1 (même C^∞) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 5[$, $]5, +\infty[$ car polynomiale.
- Pour déterminer **une** densité de X, on commence par dériver la fonction F sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 0[$, $]0, 5[$, $]5, +\infty[$.

$$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1/5 & \text{si } x \in]0, 5[\\ 0 & \text{si } x \in]5, +\infty[\end{array} \right.$$

  En choisissant la valeur (forcément positive) de f en 0 et 5, on définit une densité de X. Par exemple, on peut prendre $f(0) = 1/5 = f(5)$.
  Mais on pourrait tout autant choisir $f(0) = 32$ et $f(5) = \frac{13\sqrt{2}}{e^3}$.

Théorème 1.

Soit X une v.a.r. admettant une densité notée f_X.
Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt}$

2) $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = 1}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{P}([X = x]) = 0}$

4) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, *on a :* $\boxed{\mathbb{P}([X < a]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant a]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\ dt}$

$$\boxed{\mathbb{P}([X > b]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant b]) \ = \ \int_{b}^{+\infty} f_X(t)\ dt}$$

5) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, *si* $a \leqslant b$, *on a :*

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \ = \ F_X(b) - F_X(a) \ = \ \int_{a}^{b} f_X(t)\ dt}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X < b]) = \mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X < b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])}$$

Démonstration.

Pour faire cette démonstration, on se place dans le cadre restreint : on suppose que F_X est C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier et que $f_X = F_X'$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi la densité f_X est supposée C^0 sur $\mathbb{R}$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons U la fonction définie par $U(y) = \displaystyle\int_{y}^{x} f_X(t)\ dt$ pour $y \leqslant 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} U(y) \ &= \ \int_{y}^{x} f_X(t)\ dt \ = \ \int_{y}^{x} F_X'(t)\ dt \ = \ \big[\ F_X(t)\ \big]_y^x \\ &= \ F_X(x) - F_X(y) \ \underset{y \to -\infty}{\longrightarrow} \ F_X(x) \end{aligned}$$

En effet, $\displaystyle\lim_{y \to -\infty} F_X(y) = 0$ par propriété des fonctions de répartition.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$ est convergente et de valeur :

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt \ = \ F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x])$$

2) Notons V la fonction définie par $V(y) = \displaystyle\int_{0}^{y} f_X(t)\ dt$ pour $y \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} V(y) \ &= \ \int_{0}^{y} f_X(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{y} F_X'(t)\ dt \ = \ \big[\ F_X(t)\ \big]_0^y \\ &= \ F_X(y) - F_X(0) \ \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} \ 1 - F_X(0) \end{aligned}$$

En effet, $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} F_X(y) = 1$ par propriété des fonctions de répartition.

On en déduit que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_X(t)\ dt$ est convergente et de valeur :

$$\int_{0}^{+\infty} f_X(t)\ dt \ = \ 1 - F_X(0)$$

Or, d'après le point précédent, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt$ converge et vaut $F_X(0)$. On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$ converge et vaut : $\cancel{F_X(0)} + 1 - \cancel{F_X(0)} = 1$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. De par le chapitre sur les variables aléatoires (CH 20), on a :

$$\boxed{\lim_{t \to x^-} F_X(t) \ = \ F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x])}$$

Or X est une v.a.r. à densité. Donc F_X est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est donc, a fortiori, continue à gauche en x.
On en déduit : $\displaystyle\lim_{t \to x^-} F_X(t) \ = \ F_X(x)$ et donc : $\mathbb{P}([X = x]) = 0$.

4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Par l'égalité (encadrée) précédente, on a :

$$\mathbb{P}([X < a]) \ = \ F_X(a) - \cancel{\mathbb{P}([X = a])} \ = \ \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\, dt$$

D'autre part : $[X > b] = \overline{[X \leqslant b]}$ et donc : $\mathbb{P}([X > b]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant b])$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X > b]) \ &= \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant b]) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt - \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\, dt \\
&= \ \cancel{\int_{-\infty}^{b} f_X(t)\, dt} + \int_{b}^{+\infty} f_X(t)\, dt - \cancel{\int_{-\infty}^{b} f_X(t)\, dt}
\end{aligned}$$

5) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \ &= \ F_X(b) - F_X(a) \\
&= \ \cancel{\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\, dt} + \int_{a}^{b} f_X(t)\, dt - \cancel{\int_{-\infty}^{a} f_X(t)\, dt}
\end{aligned}$$

La première égalité est vérifiée pour toute fonction de répartition (*cf CH* 20). D'autre part, on a : $[a < X \leqslant b] = [a < X < b] \ \cup \ [X = b]$, union d'événements incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \ = \ \mathbb{P}([a < X < b]) + \cancel{\mathbb{P}([X = b])}$$

Les autres égalités sont démontrées de la même façon. □

Remarque

- Ce théorème illustre l'intérêt des v.a.r. à densité : on obtient la valeur de la fonction de répartition F_X et donc la loi de X sous forme d'un calcul d'intégrales (éventuellement impropres).
- Nous avons obtenu des résultats analogues dans le chapitre précédent.

	Cas discret (v.a.r. discrète)	Cas continu (v.a.r. à densité)
$\mathbb{P}([X \leqslant b])$	$\displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leqslant b}} \mathbb{P}([X = x])$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f_X(t)\, dt$
$\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ *(avec $a \leqslant b$)*	$\displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ a \leqslant x \leqslant b}} \mathbb{P}([X = x])$	$\displaystyle\int_{a}^{b} f_X(t)\, dt$
$\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$ *(avec $a \leqslant b$)*	$F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X = a])$	$F_X(b) - F_X(a)$
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$	$\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$
Régularité de F_X	En tout point $x \in \mathbb{R}$: • F_X continue à droite en x • F_X admet une limite finie à gauche en x	F_X continue sur $\mathbb{R}$

- Le symbole $\sum$ (somme au plus dénombrable) du cas discret est l'analogue, dans le cas continu, du symbole $\int$ (somme continue = intégrale).
- La quantité $f_X(t)\ dt$ doit être comprise comme la probabilité que la v.a.r. à densité X soit dans l'intervalle infinitésimal dt. C'est l'analogue de la quantité $\mathbb{P}([X = x])$ du cas discret.

Théorème 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

f est une densité de probabilité $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \textit{1. } f \textit{ est continue sur } \mathbb{R} \textit{ sauf en un nombre fini de points,} \\ \textit{2. } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0, \\ \textit{3. } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \textit{ est convergente et vaut } 1. \end{array}\right.$

Démonstration.

($\Rightarrow$) Si f est une densité de probabilité alors, par définition, $f = F'_X$ (pour une certaine v.a.r. X) sauf en un nombre fini de points. Or F_X est C^1 sauf en un nombre fini de points donc F'_X est C^0 sauf en un nombre fini de points.
La fonction f est positive par définition.
Enfin $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$ a été démontré dans le théorème précédent.
($\Leftarrow$) Admis. □

Remarque

Ce théorème peut être vu comme une réciproque des résultats précédents :

× si F_X est la fonction de répartition d'une v.a.r. alors la fonction f définie par $f(x) = F'_X(x)$ (sauf en un nombre fini de points) est une densité de probabilité à condition que f soit positive.

× inversement, si f vérifie les trois propriétés du théorème précédent, alors la fonction F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ est une fonction de répartition.

Exemple

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

a. Montrer que f est une densité de probabilité et tracer son graphe.

b. Soit X une variable aléatoire de densité f. Expliciter F_X.

c. Calculer $\mathbb{P}\left(\left[X > \dfrac{1}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \dfrac{1}{3}\right]\right)$.

Démonstration.

a. D'après le théorème précédent, il s'agit de démontrer que f vérifie trois propriétés.

1. f est C^0 sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$. En fait, f est même continue sur $\mathbb{R}$ puisque : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -1^+} \ = f(-1)$.
(et égalités analogues en 0 et 1)

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. Par exemple, si $x \in [-1, 0[$, alors $0 \leqslant 1 + x < 1$ et donc $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [-1, 0[$.

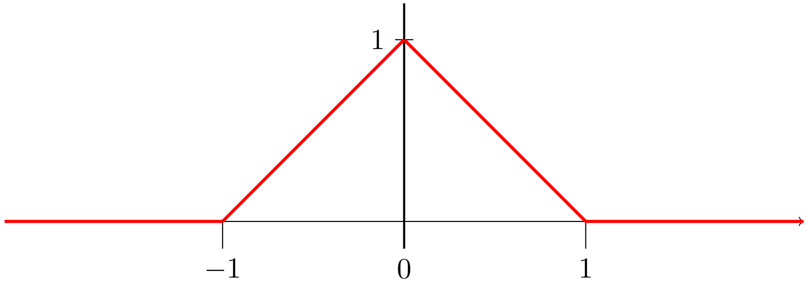
3. Notons $U(y) = \displaystyle\int_y^0$ pour $y \leqslant -1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_y^0 f(t)\ dt &= \int_y^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^0 f(t)\ dt \\ &= \int_{-1}^0 f(t)\ dt \ = \int_{-1}^0 (1+t)\ dt \ = \left[\ t + \frac{t^2}{2}\ \right]_{-1}^{0} \\ &= -\left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right) \ = \ \frac{1}{2} \underset{y \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$. On démontre de même que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$. En effet :

$$\int_0^1 f(t)\,dt \;=\; \int_0^1 (1-t)\,dt \;=\; \int_0^{-1} (1+u)\,(-du) \;=\; \int_{-1}^0 f(u)\,du$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.



b. La densité de probabilité f étant définie par morceaux, il en est (a priori) de même pour F_X.

× Si $x < -1$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

× Si $-1 \leqslant x < 0$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt$

Or : $\displaystyle\int_{-1}^{x} (1+t)\,dt = \left[\, t+\frac{t^2}{2}\,\right]_{-1}^{x} = \left(x+\frac{x^2}{2}\right) - \left(-1+\frac{(-1)^2}{2}\right)$

et donc $F_X(x) = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$.

× Si $0 \leqslant x < 1$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt$

Or : $\displaystyle\int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \left[\, t-\frac{t^2}{2}\,\right]_{0}^{x} = \left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ et $\displaystyle\int_{-1}^{0} (1+t)\,dt = \frac{1}{2}$

et donc $F_X(x) = -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$.

× Si $x \geqslant 1$: $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt$

et donc $F_X(x) = 1$.

c. Il y a deux manières de rédiger cette question :

- $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$

  Or : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)\,dt = \left[\, t-\frac{t^2}{2}\,\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}\right) = \frac{1}{8}$

- $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = 1-\mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = 1-F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

  car $F_X\left(\frac{1}{2}\right) = -\dfrac{(\frac{1}{2})^2}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{8}$

On peut aussi utiliser l'une ou l'autre de ces rédactions pour la question suivante :

- $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{\frac{1}{3}} f(t)\,dt$

  par parité. Or : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}} (1-t)\,dt = \left[\, t-\frac{t^2}{2}\,\right]_{0}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}-\frac{1}{18} = \frac{5}{18}$

- $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = F_X\left(\frac{1}{3}\right) - F_X\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$

  car $F_X\left(\frac{1}{3}\right) = -\dfrac{(\frac{1}{3})^2}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{9}$

  et $F_X\left(-\frac{1}{3}\right) = \dfrac{(-\frac{1}{3})^2}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$

□

I.3. Transformation d'une v.a.r. à densité

I.3.a) Transformation affine d'une v.a.r. à densité

Théorème 3.

Soit X une v.a.r. à densité f_X.

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

1) La var $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par $\boxed{f_Y : x \mapsto \dfrac{1}{|a|}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)}$

Démonstration.
Notons Y la v.a.r. définie par $Y = aX + b$. Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([aX + b \leqslant x]) = \mathbb{P}([aX \leqslant x - b])$$

On doit alors distinguer deux cas :

1) Si $a > 0$, alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \dfrac{x-b}{a}\right]\right) = F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

2) Si $a < 0$, alors :

$$\begin{array}{rcl} F_Y(x) & = & \mathbb{P}\left(\left[X \geqslant \dfrac{x-b}{a}\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[X < \dfrac{x-b}{a}\right]\right) \\ & = & 1 - F_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right) \end{array}$$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{x-b}{a}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. La fonction F_X étant la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité, on sait que F_X est C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en un nombre fini de points. Par composition, on en déduit que F_Y est C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en un nombre fini de points. On en déduit que Y est une v.a.r. à densité.

Déterminons une densité de Y.

1) Si $a > 0$, alors : $F_Y'(x) = \dfrac{1}{a}\ F_X'\left(\dfrac{x-b}{a}\right) = \dfrac{1}{a}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

2) Si $a < 0$, alors : $F_Y'(x) = -\dfrac{1}{a}\ F_X'\left(\dfrac{x-b}{a}\right) = -\dfrac{1}{a}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

On en conclut qu'une densité de Y est donnée par : $x \mapsto \dfrac{1}{|a|}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$. □

Remarque

- Peut-on généraliser cette propriété : si X et Y sont des variables à densité, la v.a.r. $X + Y$ est-elle à densité ?

  `NON !` on peut par exemple considérer :

  × une v.a.r. X suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ (définition à suivre),

  × et la v.a.r. Y donnée par $Y = 1 - X$.

  Alors $X + Y = 1$, ce qui montre que $X(\Omega) = \{1\}$.
  Ainsi, $X + Y$ n'admet pas de densité en tant que v.a.r. discrète (finie).
- L'ensemble des v.a.r. à densité n'est donc pas stable par addition.
  De ce fait, ce n'est pas un espace vectoriel.

I.3.b) Transformation polynomiale (carré)

Théorème 4.

Soit X une v.a.r. à densité f_X.

1) La var $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.

2) De plus, sa densité est donnée par :

$$\boxed{f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Démonstration.
La démonstration est analogue à la démonstration précédente.

- Si $x < 0$: $[Y \leqslant x] = \left[X^2 \leqslant x\right] = \varnothing$,
  et alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$: $[Y \leqslant x] = \left[X^2 \leqslant x\right] = [-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]$.
  et alors : $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$.

La fonction F_Y est C^1 sur $]-\infty, 0[$ (car constante sur cet intervalle).
Sur $]0, +\infty[$, F_Y est obtenue comme composée de la fonction F_X qui est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est C^1 sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, F_Y est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.
Enfin, en tout point $x > 0$ où F_Y est dérivable, on a :

$$\begin{aligned} F_Y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} F_X'(\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} F_X'(-\sqrt{x})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(-\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right) \end{aligned}$$

et $F_Y'(x) = 0$ pour tout $x < 0$. □

I.4. Espérance d'une v.a.r. à densité

Définition

Soit X une v.a.r. de densité f_X.

- On dit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx$ est absolument convergente.
- Dans ce cas, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx}$

Remarque

- Il faut bien comprendre que, même si la notation est la même que précédemment ($\mathbb{E}(X)$), nous venons de définir un nouvel opérateur qui agit sur les v.a.r. à densité et plus sur les v.a.r. discrètes.
- Il n'y a donc pas de raison pour que les propriétés classiques de l'opérateur espérance des v.a.r. discrètes soient vérifiées pour l'opérateur espérance des v.a.r. à densité.
- Une propriété aussi simple que la linéarité et notamment l'égalité :
  $$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$
  est problématique. En effet, on a vu que même si X et Y sont à densité, $X + Y$ ne l'est pas forcément. Il faut donc se demander ce que représente les différents symboles $\mathbb{E}$ de cette égalité ...
- En fait, il existe une théorie permettant d'unifier sous une même écriture le cas discret et le cas continu. Toutefois, c'est hors de notre portée et nous n'en dirons donc pas plus.

Méthode.
Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ est absolument convergente.

Il s'agit de démontrer que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t\ f(t)|\ dt$ est convergente.

Pour ce faire, il faut considérer :

1) $U(y) = \displaystyle\int_y^0 |t\ f(t)|\ dt$ (si $y \leqslant 0$) et montrer que $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} U(y)$ est finie,

2) $V(y) = \displaystyle\int_0^y |t\ f(t)|\ dt$ (si $y \geqslant 0$) et montrer que $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} V(y)$ est finie.

Étudions précisément ces deux cas :

1) Si $y \leqslant 0$, alors $t \mapsto |t\ f(t)|$ est intégrée sur $[y, 0] \subseteq]-\infty, 0]$.
On a donc : $t \leqslant 0$ et ainsi : $|t\ f(t)| = |t|\ |f(t)| = -t\ f(t)$
car la fonction f est positive. Ainsi :
$$U(y) = \int_y^0 -t\ f(t)\ dt = -\int_y^0 t\ f(t)\ dt$$

2) Si $y \geqslant 0$, alors $t \mapsto |t\ f(t)|$ est intégrée sur $[y, 0] \subseteq [0, +\infty[$.
On a donc : $t \geqslant 0$ et ainsi : $|t\ f(t)| = |t|\ |f(t)| = t\ f(t)$
car la fonction f est positive. Ainsi : $V(y) = \displaystyle\int_0^y t\ f(t)\ dt$

> Soit X une v.a.r. de densité f.
>
> X admet une espérance $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \textit{1)}\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\ f(t)\ dt \text{ est convergente} \\ \textit{2)}\ \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\ f(t)\ dt \text{ est convergente} \end{array}\right.$

Exemple
Soit X une variable aléatoire de densité f donnée dans l'exemple précédent.
Démontrons que X admet une espérance.

1) Si $y \leqslant -1$, on note $U(y) = \displaystyle\int_y^0 t\ f(t)\ dt = \cancel{\int_y^{-1} t \times 0\ dt} + \int_{-1}^0 t\ (1+t)\ dt$

On a donc : $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} U(y) = \int_{-1}^0 t\ (1+t)\ dt$, limite finie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

2) Si $y \geqslant 1$, on note $V(y) = \displaystyle\int_0^y t\ f(t)\ dt = \int_0^1 t \times (1-t)\ dt + \cancel{\int_1^y t \times 0\ dt}$

On a donc : $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} V(y) = \int_0^1 t\ (1-t)\ dt$, limite finie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

On en déduit que X admet une espérance. De plus, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt = \int_{-1}^0 t\ (1+t)\ dt + \int_0^1 t\ (1-t)\ dt \\
&= \int_1^0 \cancel{-}u\ (1-u)(\cancel{-}\ du) + \int_0^1 t\ (1-t)\ dt \\
&= -\int_0^1 u\ (1-u)\ du + \int_0^1 t\ (1-t)\ dt = 0
\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{E}(X) = 0$.
(note : la densité f considérée ici est paire ; le calcul effectué tire partie du caractère impaire de la fonction $t \mapsto t\ f(t)$)

Proposition 1.

On considère la fonction f définie par :

$$f \quad : \left| \begin{array}{lcc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \end{array} \right.$$

1) *Alors f est une densité de probabilité (densité de la loi dite de Cauchy).*

2) *Si X est une v.a.r. de densité f alors X n'admet pas d'espérance.*

$$\boxed{\textit{Il existe des v.a.r. à densité n'admettant pas d'espérance}}$$

Démonstration.

(i) f est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$ (on l'admet ici).

On en déduit que f est une densité de probabilité d'une v.a.r. X. Intéressons-nous maintenant à l'espérance, si elle existe, de cette v.a.r. X. On va prouver que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\ f(x)\ dx$ diverge et donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$ diverge. Ce qui démontre que X n'admet pas d'espérance.

Pour tout $x \geqslant 1$, on a : $\quad \dfrac{x}{1+x^2} \ \geqslant\ \dfrac{1}{2x} \ \geqslant\ 0$.

Or, par le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\ dx$ est divergente.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\ dx$ et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\ f(x)\ dx$ est divergente.

Ainsi, X n'admet pas d'espérance. $\square$

Proposition 2.

Soit X une v.a.r. à densité f admettant une espérance.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq 0$.

1) *La v.a.r. $Y = aX+b$ est une v.a.r. à densité et admet une espérance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(aX+b) = a\ \mathbb{E}(X) + b}$

Démonstration.

Pour améliorer la lisibilité de la démonstration, on choisit $a \geqslant 0$. On aura donc $|a| = a$ (*le cas $a \leqslant 0$ se traite de manière analogue*).

1) On a déjà démontré que si X a pour densité f alors $Y = aX+b$ est une v.a.r. à densité et $f_Y(x) = \dfrac{1}{|a|}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right) = \dfrac{1}{a}\ f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

Il s'agit donc de démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_Y(t)\ dt$ est absolument convergente.

- si $y \leqslant 0$, notons $U(y) = \displaystyle\int_y^0 t\ f_Y(t)\ dt$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} U(y) & = & \dfrac{1}{|a|}\displaystyle\int_y^0 t\ f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\ dt \ = \ \frac{1}{\cancel{a}}\int_{\frac{y-b}{a}}^{-\frac{b}{a}} (au+b)\ f_X(u)\ \cancel{a}\ du \\ & = & a\displaystyle\int_{\frac{y-b}{a}}^{-\frac{b}{a}} u\ f_X(u)\ du \ + \ b\int_{\frac{y-b}{a}}^{-\frac{b}{a}} f_X(u)\ du \\ & \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} & a\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}} u\ f_X(u)\ du \ + \ b\int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}} f_X(u)\ du \end{array}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}} u\ f_X(u)\ du$ est convergente car, par hypothèse, X admet une espérance. D'autre part, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}} f_X(u)\ du$ est aussi convergente (c'est $F_X(-\frac{b}{a})$). Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\ f_Y(t)\ dt$ est convergente.

- si $y \geqslant 0$, notons $V(y) = \displaystyle\int_0^y t\ f_Y(t)\ dt$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} V(y) & = & \dfrac{1}{|a|} \displaystyle\int_0^y t\ f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\ dt\ =\ \frac{1}{\cancel{a}} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{y-b}{a}} (au+b)\ f_X(u)\ \cancel{a}\ du \\ & \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} & a \displaystyle\int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} u\ f_X(u)\ du\ +\ b \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} f_X(u)\ du \end{array}$$

On conclut de même que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ f_Y(t)\ dt$ est convergente.

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_Y(t)\ dt$ est absolument convergente ce qui permet de conclure que X admet une espérance.

2) Par la démonstration précédente :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\ f_Y(t)\ dt + \int_0^{+\infty} t\ f_Y(t)\ dt \\ & = & a\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}} u\ f_Y(u)\ du + \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} u\ f_Y(u)\ du\right) \\ & + & b\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{b}{a}} f_Y(u)\ du + \int_{-\frac{b}{a}}^{+\infty} f_Y(u)\ du\right) \\ & = & a \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u\ f_Y(u)\ du}_{\mathbb{E}(X)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u)\ du}_{1} \end{array}$$

□

Remarque

- On peut penser cette propriété comme une version faible de la propriété de linéarité.
- La propriété de linéarité existe mais demande le cadre de la théorie unificatrice citée précédemment.

Définition Variable centrée

Soit X une v.a.r. à densité.

- On dit que la variable X est une **variable centrée** si :
  1) X admet une espérance,
  2) $\mathbb{E}(X) = 0$.
- Si X admet une espérance, alors la v.a.r. $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée. Elle est appelée **v.a.r. centrée associée à** X.

Remarque

- Soit X une v.a.r. à densité admettant une espérance. Alors on a :
  1) la v.a.r. $X - \mathbb{E}(X)$ est une v.a.r. à densité et admet une densité (*cf* Proposition 2).
  2) d'après cette même proposition, la v.a.r. $Y = X - \mathbb{E}(X)$ ($Y = aX + b$ avec $a = 1$ et $b = -\mathbb{E}(X)$) admet pour espérance : $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$.
- Ce type d'opération est à comprendre comme un opérateur de normalisation. Pour démontrer certains résultats, il est utile de se placer dans le cas où la v.a.r. X est centrée. On ne peut supposer, en toute généralité, qu'une v.a.r. est centrée. Par contre, on peut montrer le résultat sur la v.a.r. centrée $Y = X - \mathbb{E}(X)$ puis en déduire un résultat analogue sur X.

I.5. Variance d'une loi à densité

Définition Moments d'ordre r

Soit X une v.a.r. de densité f_X et soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que X **admet un moment d'ordre** r, noté $m_r(X)$, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r \ f_X(x) \ dx$ est absolument convergente.
- Sous réserve d'existence, on a : $\boxed{m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r \ f_X(x) \ dx}$

Remarque

- Si $r = 0$, on a $X^0 = 1$ et donc $m_0(X) = \mathbb{E}(1) = 1$.
- Si $r = 1$, on a $X^1 = X$ et donc $m_1(X) = \mathbb{E}(X)$.
- Le fait que $\mathbb{E}(X^r)$ puisse s'écrire sous la forme d'une intégrale n'est pas évident. Pour le démontrer, on peut considérer la variable $Y = X^r$, montrer qu'elle est à densité f_Y et démontrer par un changement de variable que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) \ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) \ dx$ (*cf* démonstration du théorème 5)
- On peut aussi utiliser le théorème de transfert (admis). Sous les hypothèses :
  × X v.a.r. de densité f,
  × g continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points,
  × $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) \ dt$ est absolument convergente.

Alors
1) la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance
2) $\mathbb{E}(g(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) \ dt$

Définition

Soit X une v.a.r. à densité.

- Si la v.a.r. X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))$ admet un moment d'ordre 2, on dit que X **admet une variance**, notée $\mathbb{V}(X)$:

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = m_2(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$$

- Sous ces hypothèses on appelle écart-type et on note $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$

Remarque

- Si X est une v.a.r. à densité alors $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est une v.a.r. de densité $f_Y : x \mapsto f_X(x + \mathbb{E}(X))$ (*cf* transformation affine). De même, $Z = Y^2$ est une v.a.r. à densité (*cf* transformation polynomiale). Ainsi, `SI` X `ADMET UNE VARIANCE`, l'opérateur espérance évoqué dans cette définition est l'opérateur sur les v.a.r. à densité et on a :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ f_Z(x) \ dx = \int_0^{+\infty} x \ f_Z(x) \ dx$$
puisque $f_Z(x) = 0$ si $x < 0$ (*cf* transformation polynomiale).
- On remarque au passage que l'écart-type bien défini puisque, si X admet une variance, $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$. En effet, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \ f_Z(x) \ dx \geqslant 0$ car f_Z est une densité et est donc positive et que $x \geqslant 0$ sur l'intervalle d'intégration.
- La variance d'une v.a.r. X consiste en le calcul du moment d'ordre 2 de la variable $Y = X - \mathbb{E}(X)$. Cette v.a.r. est centrée. De ce fait, $\mathbb{V}(X)$ est défini comme le moment centré d'ordre 2 de la v.a.r. X.
- La variance (comme l'écart-type) est une mesure moyenne de l'écart existant entre X et $\mathbb{E}(X)$.
  ► Mais alors, pourquoi mesure-t-on le moment centré d'ordre 2 (= moyenne du carré de l'écart entre X et $\mathbb{E}(X)$) et pas simplement le moment centré d'ordre 1 (= moyenne de l'écart entre X et $\mathbb{E}(X)$) ?

☞ Tout simplement parce que l'espérance de la v.a.r. $Y = X - \mathbb{E}(X)$, si elle existe, est nulle (v.a.r. centrée). Le moment centré d'ordre 1 ne nous fournit donc pas d'information sur la moyenne de l'écart entre X et $\mathbb{E}(X)$.

Théorème 5.

Soit X une v.a.r. à densité f_X.

On suppose que X admet une variance. Alors :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 \ f_X(x) \ dx}$$

Démonstration.

Notons $Y = X - \mathbb{E}(X)$ et $Z = Y^2 = (X - \mathbb{E}(X))^2$. On a vu dans la remarque précédente que si une v.a.r. à densité X admet une variance, celle-ci s'écrit :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \int_0^{+\infty} x \ f_Z(x) \ dx \quad \left(= \lim_{s \to +\infty} \ \int_0^s x \ f_Z(x) \ dx \right)$$

Considérons alors la quantité $U(s) = \displaystyle\int_0^s x \ f_Z(x) \ dx$. On a alors :

$$\begin{aligned} U(s) \ &= \ \int_0^s x \ f_Z(x) \ dx \\ &= \ \int_0^s x \ \frac{1}{2\sqrt{x}} \ (f_Y(\sqrt{x}) + f_Y(-\sqrt{x})) \ dx \\ &= \ \frac{1}{2} \int_0^s \sqrt{x} \ (f_Y(\sqrt{x}) + f_Y(-\sqrt{x})) \ dx \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable suivant.

- $u = \sqrt{x}$ donc $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ dx$ et $dx = 2u \ du$
- Si $x = 0$ alors $u = \sqrt{0} = 0$
- Si $x = s$ alors $u = \sqrt{s}$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} U(s) \ &= \ \frac{1}{\cancel{2}} \int_0^{\sqrt{s}} u \ (f_Y(u) + f_Y(-u)) \ (\cancel{2}u \ du) \\ &= \ \int_0^{\sqrt{s}} u^2 \ f_Y(u) \ du + \int_0^{\sqrt{s}} u^2 \ f_Y(-u) \ du \\ &= \ \int_0^{\sqrt{s}} u^2 \ f_Y(u) \ du - \int_0^{-\sqrt{s}} (-v)^2 \ f_Y(v) \ dx \end{aligned}$$

La dernière quantité étant obtenue grâce au changement de variable :

- $v = -u$ donc $dv = - \ du$ et $du = - \ dv$
- Si $u = 0$ alors $v = -0 = 0$
- Si $u = -\sqrt{s}$ alors $v = -(-\sqrt{s}) = \sqrt{s}$

On peut alors finir le calcul.

$$\begin{aligned} U(s) \ &= \ \int_0^{\sqrt{s}} u^2 \ f_Y(u) \ du + \int_{-\sqrt{s}}^0 v^2 \ f_Y(v) \ dv \ = \ \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} t^2 \ f_Y(t) \ dt \\ &= \ \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} t^2 \ f_X(t + \mathbb{E}(X)) \ dx \ = \ \int_{-\sqrt{s}+\mathbb{E}(X)}^{\sqrt{s}+\mathbb{E}(X)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \ f_X(x) \ dx \\ &\underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 \ f_X(x) \ dx \end{aligned}$$

La convergence est obtenue par le fait que $U(s)$ admet une limite finie en $+\infty$ (qui est $\mathbb{V}(X)$) et que $\sqrt{s} + \mathbb{E}(X) \to +\infty$ quand $s \to +\infty$.
La dernière égalité, quant à elle, a été encore une fois obtenue grâce à un changement de variable :

- $x = t + \mathbb{E}(X)$ donc $dx = dt$
- Si $t = \sqrt{s}$ alors $x = \sqrt{s} + \mathbb{E}(X)$
- Si $t = -\sqrt{s}$ alors $x = -\sqrt{s} + \mathbb{E}(X)$

D'où le résultat. □

Remarque

- Le théorème 5 peut être vu comme un cas particulier du théorème de transfert en prenant l'application $g : x \mapsto (x - \mathbb{E}(X))^2$.

Théorème 6. *Formule de Kœnig-Huygens*

Soit X une v.a.r. à densité.

On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$.

La v.a.r. X admet une variance	$\Leftrightarrow$	*La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2*

Et dans ce cas :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

Démonstration.

La v.a.r. X admet une variance

SSI la v.a.r. $Y = X - \mathbb{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2

SSI $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, f_X(x) \, dx$ est absolument convergente

SSI $\displaystyle\int_{s}^{0} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, f_X(x) \, dx$ admet une limite quand $s \to -\infty$

et $\displaystyle\int_{0}^{t} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, f_X(x) \, dx$ admet une limite quand $t \to +\infty$.

On note alors $U(s,t) = \displaystyle\int_{s}^{t} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, f_X(x) \, dx$ et on remarque que : $(x - \mathbb{E}(X))^2 = x^2 - 2\mathbb{E}(X)x + (\mathbb{E}(X))^2$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
U(s,t) &= \int_s^t (x^2 - 2\mathbb{E}(X)x + (\mathbb{E}(X))^2) \, f_X(x) \, dx \\
&= \int_s^t x^2 \, f_X(x) \, dx + \int_s^t -2\mathbb{E}(X)x \, f_X(x) \, dx + \int_s^t (\mathbb{E}(X))^2 \, f_X(x) \, dx \\
&= \int_s^t x^2 \, f_X(x) \, dx - 2\mathbb{E}(X) \int_s^t x \, f_X(x) \, dx + (\mathbb{E}(X))^2 \int_s^t f_X(x) \, dx
\end{aligned}$$

Par hypothèse X admet une espérance donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx$ est convergente et vaut $\mathbb{E}(X)$. D'autre part, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \, dx$ est convergente et vaut 1.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, f_X(x) \, dx$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_s^t x^2 \, f_X(x) \, dx$ l'est, ce qui démontre le résultat.

En cas de convergence, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_X(x) \, dx - 2\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \times 1 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2
\end{aligned}$$

□

Définition Variables centrées réduites

Soit X une v.a.r. à densité.

a) Si X admet une espérance égale à 0 on dit que X est une variable centrée.

b) Si X admet une variance égale à 1 on dit que X est une variable réduite.

c) Si X admet une variance, la variable $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable centrée réduite associée à X.

Remarque

On peut considérer ceci comme une opération de normalisation de la variance (plus simple pour raisonner dans les théorèmes).

II. Lois à densité usuelles

II.1. Loi uniforme sur un intervalle réel

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $[a, b]$ (pour a et b deux réels tels que $a < b$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [a, b]}$

  b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ pour signifier que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Remarque

- On vérifie aisément que f est bien une densité de probabilité :

  1) f est continue sur $]-\infty, a[\, \cup \,]a, b[\, \cup \,]b, +\infty[$

  2) $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqslant 0$

  3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ dt$ converge en tant qu'intégrale sur le segment $[a, b]$ de la fonction $f_{|[a,b]}$ continue sur $[a, b]$. En effet :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ dt & = & \cancel{\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t) \ dt} + \displaystyle\int_{a}^{b} f(t) \ dt + \cancel{\displaystyle\int_{b}^{+\infty} f(t) \ dt} \\ & = & \displaystyle\int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \ dt \ = \ \frac{b-a}{b-a} \ = \ 1 \end{array}$$

- On définit de même la loi uniforme sur $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$.

Proposition 3.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.
Alors sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \ x \in]-\infty, a[\\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \ x \in [a, b] \\ 1 & si \ x \in]b, +\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la valeur de $F_X(x)$ en fonction de x.

- Si $x < a$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \ dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \ dt = 0$$

- Si $x \in [a, b]$:

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t) \ dt = \int_{-\infty}^{a} f(t) \ dt + \int_{a}^{x} f(t) \ dt \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0 \ dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \ dt \\ & = & 0 + \dfrac{x-a}{b-a} \end{array}$$

- Si $x > b$:

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t) \ dt + \int_{a}^{b} f(t) \ dt + \int_{b}^{x} f(t) \ dt \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0 \ dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \ dt + \int_{a}^{x} 0 \ dt \\ & = & 0 + \dfrac{b-a}{b-a} + 0 = 1 \end{array}$$

$\square$

Théorème 7.
Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ ($a<b$).
Alors, on a :

1) *X admet une espérance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}}$

Démonstration.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge comme intégrale sur le segment $[a,b]$ de la restriction sur $[a,b]$ de la fonction $t \mapsto tf(t)$, continue sur $[a,b]$. En effet :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt &= \cancel{\int_{-\infty}^{a} t\ f(t)\ dt} + \int_{a}^{b} t\ f(t)\ dt + \cancel{\int_{b}^{+\infty} t\ f(t)\ dt} \\
&= \int_a^b \frac{t}{b-a}\ dt \ = \ \frac{1}{b-a}\int_a^b t\ dt \ = \ \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{b-a}} \ = \ \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$. □

Cas particulier de la loi uniforme sur $[0,1]$
En **Scilab**, l'opérateur `rand` permet de simuler la loi $\mathcal{U}([0,1])$. Comme on l'a vu en TP, cette fonction `rand` permet aussi la simulation des lois uniformes sur $[a,b]$. Il suffit pour ce faire d'effectuer une simple transformation affine. Le résultat mathématique correspondant est le suivant.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a<b$. Soit X une v.a.r. à densité.
Notons $Y = a + (b-a)X$.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])}$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, ses caractéristiques sont les suivantes.

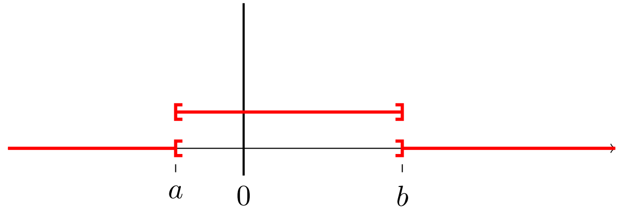
- Densité : $f_X : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$

- Fonction de répartition : $F_X : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases} \end{array}\right.$

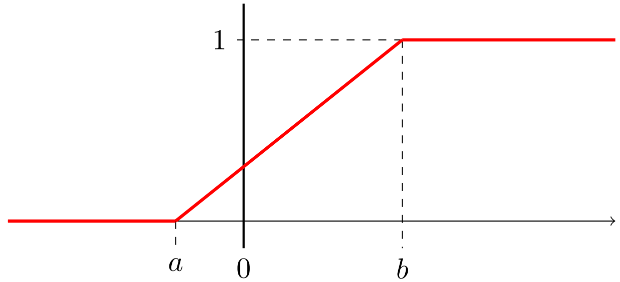
- Espérance de X : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{2}}$

Représentation graphique.
On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

- Représentation graphique de la densité f_X.



- Représentation graphique de la fonction de répartition F_X.



II.2. Loi exponentielle

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi exponentielle de paramètre** α (avec $\alpha > 0$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [0, +\infty[}$

  b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \alpha \ \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ pour signifier que X suit la loi exponentielle de paramètre α.

Remarque

- On vérifie aisément que f est bien une densité de probabilité :

  1) f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

  2) $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqslant 0$

  3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge. En effet, si $y \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^y f(t)\ dt &= \int_0^y \alpha\ \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt = \alpha \int_0^y \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt = \cancel{\alpha} \left[\frac{-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\cancel{\alpha}} \right]_0^y \\ &= -\mathrm{e}^{-\alpha y} + \mathrm{e}^{\alpha 0} = -\mathrm{e}^{-\alpha y} + 1 \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

  On en déduit : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$.

Proposition 4.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$.
Alors sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & si\ x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-\alpha x} & si\ x \in [0, +\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

Démonstration.
Faite dans la remarque précédente. □

Théorème 8.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ (avec $\alpha > 0$).
Alors, on a :

1) *X admet une espérance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\alpha}}$

Démonstration.

1) Notons $U(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^y t f(t)\ dt = \int_0^y t f(t)\ dt$ pour $y \geqslant 0$.

On effectue une intégration par parties : $\left| \begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^{-\alpha t} & v = -\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha} \end{array} \right.$.

$$\begin{aligned} U(y) &= \int_0^y t f(t)\ dt = -\frac{1}{\alpha} \left[\ t\ \mathrm{e}^{-\alpha t}\ \right]_0^y + \frac{1}{\alpha} \int_0^y \mathrm{e}^{-\alpha t}\ dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \left((-y\ \mathrm{e}^{-\alpha y} + 0) + (-\mathrm{e}^{-\alpha y} + 1) \right) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

En effet, $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} -y\ \mathrm{e}^{-\alpha y} = 0$ et $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} -\mathrm{e}^{-\alpha y} = 0$.

2) On en déduit : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\alpha}$.

□

Théorème 9.

Soit X une v.a.r. à densité.

X suit une loi exponentielle si et seulement si :

1) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{R}^+}$

2) $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\boxed{\mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \mathbb{P}([X > t])}$

(on dit que la loi exponentielle est sans mémoire)

3) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\boxed{\mathbb{P}([X > s]) \neq 0}$

Démonstration.

($\Rightarrow$) S'il existe $\alpha > 0$ tel que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ alors :

1) $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ (par définition),

2) $\mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \dfrac{\mathbb{P}([X > s] \cap [X > s+t])}{\mathbb{P}([X > s])} = \dfrac{\mathbb{P}([X > s+t])}{\mathbb{P}([X > s])}$

En effet, $[X > s+t] \subseteq [X > s]$. Or on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X > s]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant s]) = 1 - F_X(s) & = & 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\alpha s}) \\ & = & \mathrm{e}^{-\alpha s} \end{array}$$

Ainsi : $\mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\alpha s}} = \mathrm{e}^{-\alpha t} = \mathbb{P}([X > t])$.

3) Si $s \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}([X > s]) = \mathrm{e}^{-\alpha s} > 0$.

($\Leftarrow$) Ce résultat plus compliqué nécessite de savoir résoudre une équation fonctionnelle. Plus précisément, si G est une fonction $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall (s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ G(s+t) = G(s)\ G(t) \\ \bullet\ G(1) \neq 0 \\ \bullet\ G \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ G(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} \end{array}$$

En notant $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $G(t) = \mathbb{P}([X > t])$ (pour $t \in \mathbb{R}^+$), on démontre que G vérifie les propriétés ci-dessus et ainsi que :

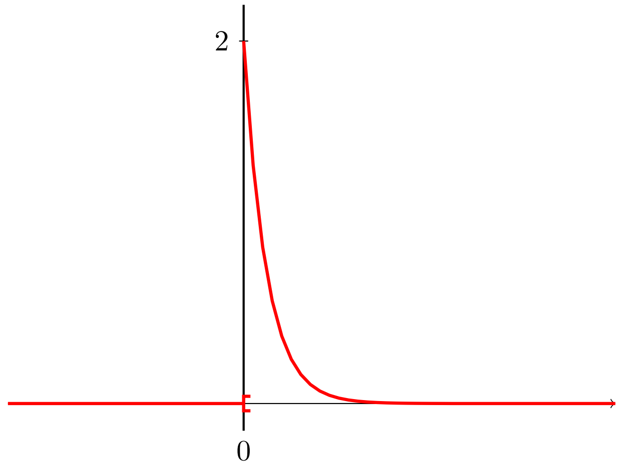
$$F_X(t) = \mathbb{P}([X \leqslant t]) = 1 - \mathbb{P}([X > t]) = 1 - G(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

pour un certain $\alpha > 0$. On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle. On en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$. $\square$

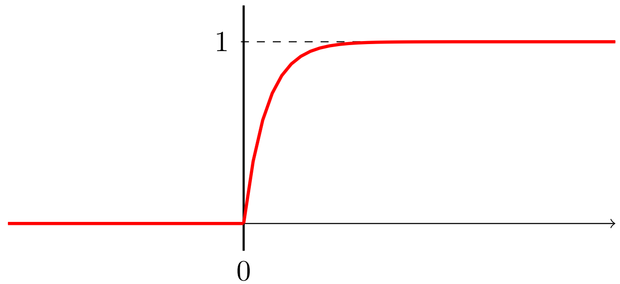
Représentation graphique.

On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.

- Représentation graphique de la densité f_X.



- Représentation graphique de la fonction de répartition F_X.



II.3. Loi normale centrée réduite

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi normale centrée réduite** si :

  a) $\boxed{X(\Omega) =]-\infty, +\infty[}$

  b) X admet pour densité la fonction φ définie par :

$$\varphi \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ pour signifier que X suit la loi normale centrée réduite.

Remarque

- On peut vérifier que φ est bien une densité de probabilité :

  1) φ est continue sur $\mathbb{R}$

  2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geqslant 0$

  3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \ dt = 1$ (Admis).

- La fonction ϕ est paire. Son graphe sera donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite n'admet pas d'expression « simple ». On la note Φ.

$$\Phi \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \ dt \end{array} \right.$$

Théorème 10.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Alors, on a :

1) *X admet une espérance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = 0}$ *(et $\mathbb{V}(X) = 1$)*

Démonstration.

1) Notons $U(y) = \displaystyle\int_0^y t\varphi(t) \ dt = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ t \ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \ t \ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \ dt$ pour $y \geqslant 0$.

On a alors : $\displaystyle\int_0^y \ t \ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \ dt = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^y = -\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} + \mathrm{e}^0 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$.

Or, comme $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} = 0$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t) \ dt$ est convergente et vaut 1.

De même, notons $V(y) = \displaystyle\int_0^y t\varphi(t) \ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^0 \ t \ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \ dt$ pour $y \leqslant 0$.

On a alors :
$$\begin{aligned} \int_y^0 \ t \ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \ dt &= -\int_{-y}^0 -t \ \mathrm{e}^{-\frac{(-t)^2}{2}} \ dt = \int_0^{-y} -t \ \mathrm{e}^{-\frac{(-t)^2}{2}} \ dt \\ &= -(1 - \mathrm{e}^{-\frac{(-y)^2}{2}}) = -1 + \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

(on utilise en fait le caractère impair de la fonction $t \to t\varphi(t)$)

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\varphi(t) \ dt$ est convergente et vaut -1.

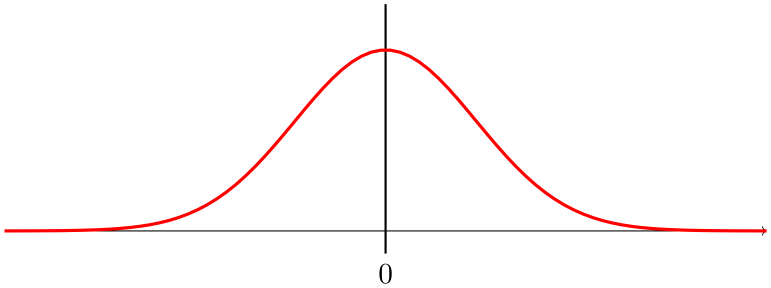
Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \ \varphi(t) \ dt$ est une intégrale absolument convergente.

2) Par le calcul précédent, $\mathbb{E}(X)$ a pour valeur : $1 - 1 = 0$.

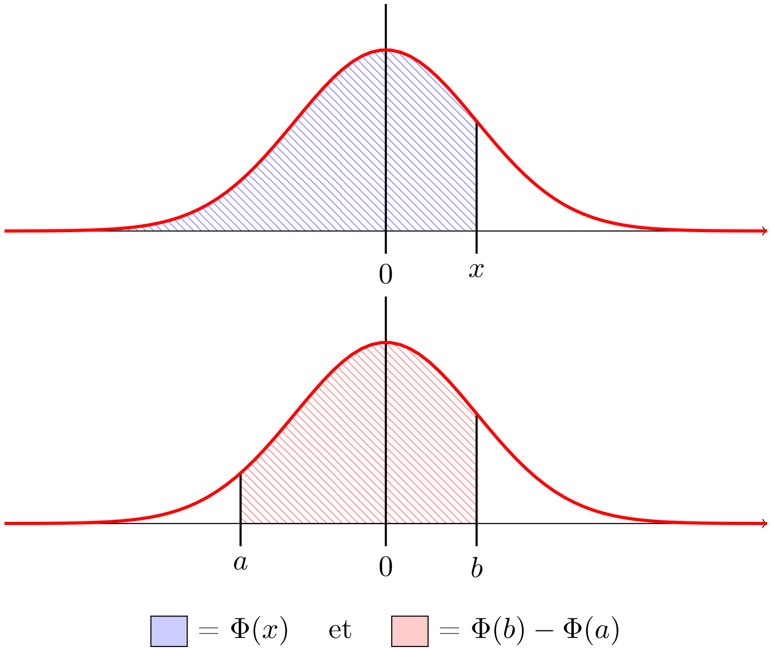
□

Représentation graphique.
On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

- Représentation graphique de la densité φ.



- Représentation graphique de la fonction de répartition Φ.
  Φ n'admet pas d'expression « simple ». On représente donc graphiquement $\Phi(x)$ comme l'aire sous la courbe de ϕ entre $-\infty$ et x.



Proposition 5.
Notons Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\Phi(-x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -\int_{+\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(-u)^2}{2}} du = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \Phi(x)$. □

Remarque
Ce résultat provient de la parité de φ et peut se lire graphiquement.

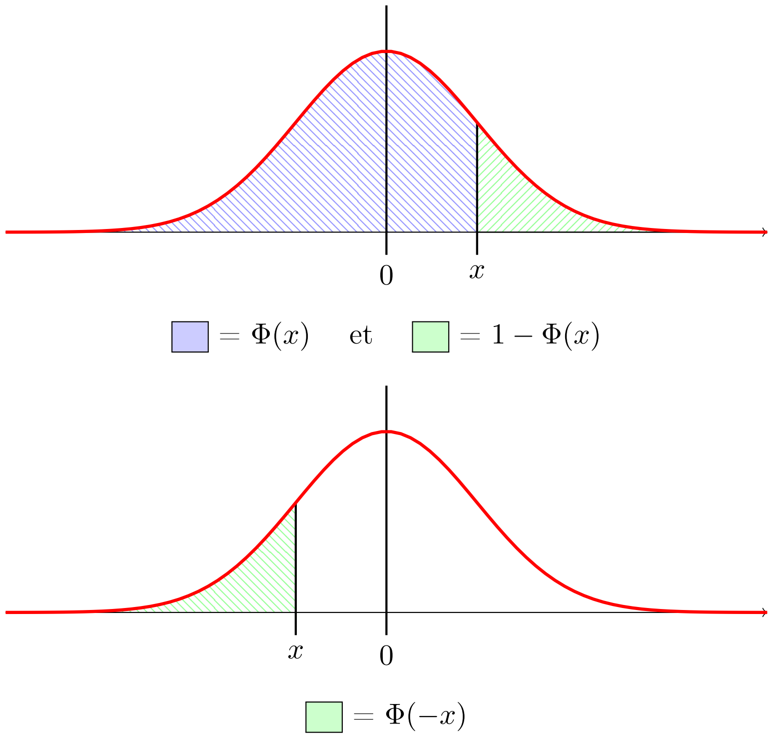


Table de la loi normale centrée réduite.

On utilise parfois (notamment en statistiques), des tables contenant les valeurs caractéristiques de certaines lois usuelles. La table ci-dessous contient les valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\Phi(t) = \mathbb{P}([X \leqslant t]) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Fig. 1 Table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Comment lire les valeurs de cette table ?

- Par exemple, pour lire la valeur de $\Phi(1.64)$
  - × on sélectionne la ligne 1.6
  - × on sélectionne alors la colonne 0.04

  On lit la valeur de la cellule l'intersection de cette ligne et colonne. On lit : $\Phi(1.64) = 0.9495$
  (la probabilité de l'événement $[X \leqslant 1.64]$ est d'environ 95%)
- Par exemple, pour lire la valeur de $\Phi(-0.81)$
  On utilise la formule : $\Phi(-0.81) = 1 - \Phi(0.81)$
  On lit alors : $\Phi(-0.81) = 1 - 0.7881 = 0.2119$
  (la probabilité de l'événement $[X \leqslant -0.81]$ est d'environ 21%)

II.4. Loi normale (ou de Laplace-Gauss)

Définition

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) de paramètre** (m, σ) (avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) =]-\infty, +\infty[}$

  b) X admet pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \end{array} \right.$$

- On utilisera la notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ pour signifier que X suit la loi normale de paramètre (m, σ).

Remarque

- L'expression de f_X est proche de celle de φ : on obtient $f_X(x)$ en appliquant à x un transformation affine (à multiplication par $\frac{1}{\sigma}$ près). Plus précisément, notons $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ t(x) \ = \ \frac{x-m}{\sigma}$$

  On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma}\ \varphi(t(x))$.

- On peut se servir de cette propriété pour déduire les propriétés de f_X de celle de φ. Par exemple, on peut vérifier que f_X est bien une densité de probabilité :

  1) f_X est C^0 sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions C^0 sur $\mathbb{R}$

  2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) \geqslant 0$

  3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma}\ \varphi(t(x))\ dx = \frac{1}{\cancel{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{\sigma}\varphi(u)\ du$

La dernière égalité provient du changement de variable suivant :

- $u = t(x) = \dfrac{x-m}{\sigma}$ donc $du = \dfrac{1}{\sigma}\ dx$ et $dx = \sigma\ du$
- Si $x = -\infty$ alors $u = -\infty$
- Si $x = +\infty$ alors $u = +\infty$

Théorème 11.

Soit X une v.a.r. à densité.

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

On a alors :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)}$$

Démonstration.

Notons $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$.

$(\Rightarrow)$ On se sert ici du fait que X^* apparaît comme transformée affine de la v.a.r. X. En effet : $X^* = \dfrac{1}{\sigma}\ X - \dfrac{m}{\sigma}$ ($X^* = aX + b$ avec $a = \frac{1}{\sigma}$ et $b = -\frac{m}{\sigma}$).

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_{X^*} vérifie :

$$\begin{aligned} f_{X^*}(x) &= \frac{1}{|a|}\ f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma}}\ f_X\left(\frac{x+\frac{m}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma \cdot f_X(\sigma\ x + m) \\ &= \cancel{\sigma} \cdot \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma x + m) - m}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite. Ainsi : $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

($\Leftarrow$) On se sert ici du fait que X apparaît comme transformée affine de la v.a.r. X^*. En effet : $X = \sigma\ X^* + m$ ($X = aX^* + b$ avec $a = \sigma$ et $b = m$).
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la densité de probabilité f_X vérifie :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{|a|}\ f_{X^*}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{\sigma}\ f_{X^*}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît la densité de probabilité de la loi normale de paramètre (m, σ).
Ainsi : $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$. □

Théorème 12.

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$.

Alors, on a :

1) *X admet une espérance.*

2) $\boxed{\mathbb{E}(X) = m}$ *(et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$)*

Démonstration.
Il y a deux manières de faire cette démonstration.

- La manière directe consiste à étudier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$ (bon exercice).
- La seconde manière est plus élégante. Elle consiste à utiliser le théorème précédent. Notons $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$. On a alors $X = \sigma\ X^* + m$.

  Par la linéarité (faible) de l'espérance, la v.a.r. X^* admet une espérance donnée par : $\mathbb{E}(X^*) = \sigma\ \mathbb{E}(X) + m = \sigma \times 0 + m = m$.

  (de même, $\mathbb{V}(X^*) = \sigma^2\mathbb{V}(X) = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2$)

□

Remarque

- Ce théorème permet de comprendre les notations m et σ.
  Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. Ainsi :
  - × La notation m peut-être lue comme « moyenne ».
  - × La notation σ est celle que nous avons déjà utilisé pour l'écart type.
- La loi normale centrée réduite est simplement une loi normale particulière : celle dont les paramètres (m, σ) vérifient $m = 0$ et $\sigma = 1$.
- Évidemment, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma) \\ \bullet\ \mathbb{E}(X) = 0 \\ \bullet\ \mathbb{V}(X) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

  Autrement dit, la loi normale centrée réduite est donc la loi des v.a.r. X qui suivent une loi normale ($X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$) et qui sont centrées ($\mathbb{E}(X) = 0$) et réduites ($\mathbb{V}(X) = 1$).

Représentation graphique.
On considère une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$.
La densité d'une telle loi est représentée par une courbe en cloche.

× Dans le cas d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, cette cloche est centrée en 0.

× Dans le cas d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$, cette cloche est centrée en m.

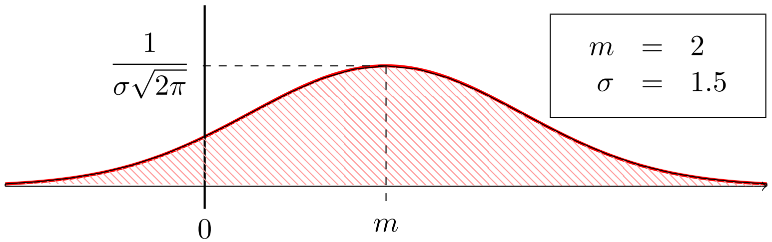
D'autre part, la forme de cette cloche (hauteur et largeur) dépend de σ :

× plus σ est petit, plus le pic est haut et fin ;

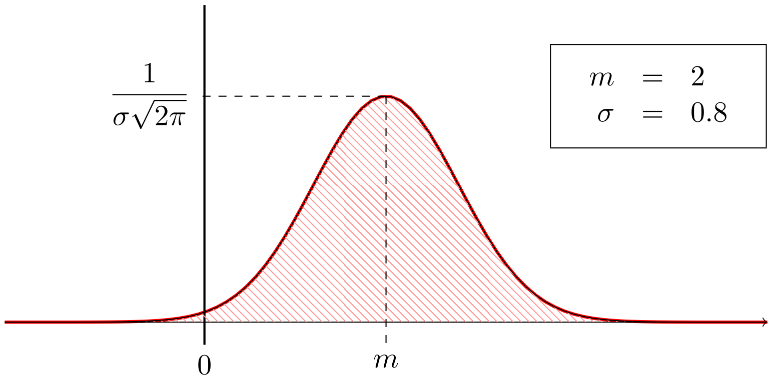
× plus σ est grand, plus le pic est bas et large.

Notez que l'aire sous la courbe entre $-\infty$ et $+\infty$ est invariante (on a toujours $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt = 1$).

- Représentation graphique de la densité f_X de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$.



- Représentation graphique de la densité f_X de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$.



- Représentation graphique de la densité f_X de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$.