Feuille d'exercices n°21 : Variables aléatoires à densité

Démontrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Exercice 1. (★)
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

a. Montrer que f est une densité de probabilité.

b. Soit X une variable aléatoire de densité f.
Expliciter sa fonction de répartition F_X.

c. Tracer les représentations graphiques de f et F_X.

d. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

e. Calculer $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \frac{1}{3}\right]\right)$.

Exercice 2. (★)
Pour $a > 1$, on note f la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \ln x}{x^2} & \text{si } x \in [1, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

b. Si X est une variable de densité f, quelle est son espérance ? Sa variance ?

Exercice 3. (★)
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$$

a. Montrer que f est une densité de probabilité.

b. Soit X une variable aléatoire de densité f.
Expliciter sa fonction de répartition F_X.

c. Est-ce que X a une espérance ? Si oui, la calculer.

d. Déterminer la loi de $Y = |X|$.
On donnera son support, sa fonction de répartition ainsi que sa densité, si elle existe.

Transformation d'une v.a.r. densité quelconque

Exercice 4. (★)
On suppose que X est une variable aléatoire à densité, on note f sa densité et F sa fonction de répartition. Déterminer (en fonction de f et F) la fonction de répartition F_Y et une densité f_Y (si elle existe) des variables Y suivantes :

a. $Y = 2X + 1$

b. $Y = aX + b$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
(il y aura peut-être plusieurs cas à faire ...)

c. $Y = \mathrm{e}^X$

d. $Y = X^2$

Transformations de v.a.r. à densités usuelles

Exercice 5. (★)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, pour $\lambda > 0$.

a. Est-ce que $Y = \sqrt{X}$ est bien définie ? Déterminer sa loi.

b. Déterminer les lois de $Z = X^2$ et $U = X^3$.

Exercice 6. (★)
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^2$.

b. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

c. Déterminer la loi de $Z = -X$.

Exercice 7. (★)
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

a. Déterminer la loi de $Y = e^X$. *(c'est ce qu'on appelle la loi* log-normale*)*

b. Quelle est l'espérance de Y ?

Exercice 8. (★)
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $Y = e^X$.
Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Théorème d'inversion

Exercice 9. (★★)
Soit X une v.a.r. dont la loi est donnée par sa fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to]0,1[$. Soit U une v.a.r. telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
On suppose de plus que :

× F est continue sur $\mathbb{R}$,

× F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

2. Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. $V = F^{-1}(U)$

Exercice 10. (★)
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $\lambda > 0$.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$.

b. En déduire une fonction **Scilab** permettant de simuler la loi exponentielle.

Loi du min, du max de deux v.a.r. à densité

Exercice 11. (★★)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
On définit les variable aléatoires $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. Démontrer que :

$$[U > t] = [X > t] \cap [Y > t] \qquad \text{et} \qquad [V \leqslant t] = [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]$$

2. Déterminer la fonction de répartition G, puis une densité g de U.

3. Déterminer la fonction de répartition H, puis une densité h de V.

4. Calculer l'espérance de U.

5. Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y.
En déduire l'espérance de V.

Exercice 12. (★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
On considère alors une variable aléatoire X dont f est une densité.

2. Calculer la fonction de répartition, qu'on notera F, de X.

3. Déterminer $P(X \leqslant 1/4)$, $P(X \geqslant 1/2)$, $P(|X| \leqslant 3/4)$.

4. On pose $Y = 1 - \ln(X)$.

  a. Déterminer la fonction de répartition de Y.

  b. En déduire que Y est à densité et en donner une densité.

5. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi que X.

  a. Déterminer la loi de $U = \min(X_1, X_2)$.

  b. Déterminer la loi de $V = \max(X_1, X_2)$.

Exercice 13. ($\bigstar$)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } x \in [-\ln(2), \ln(2)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire et calculer $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$.

2. En déduire que f est une densité de probabilité.
On considère alors une variable aléatoire X dont f est une densité.

3. Calculer la fonction de répartition, qu'on notera F, de X.

4. On pose $Y = |X|$.

- *a.* Déterminer la fonction de répartition de Y.
- *b.* En déduire que Y est à densité et en donner une densité.

5. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi que Y.

- *a.* Déterminer la loi de $U = \min(Y_1, Y_2)$.
- *b.* Déterminer la loi de $V = \max(Y_1, Y_2)$.

Exercice 14. ($\bigstar$)
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
Déterminer la fonction de répartition de $Y = \min(X, 1/X)$.

Loi d'une somme de v.a.r. continues

Exercice 15. ($\bigstar\bigstar$)
Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On admet que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la variable $U+V$ est à densité et admet pour densité la fonction :

$$f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_U(x-t)\ dt$$

1. Montrer que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et en déterminer une densité.

2. En déduire, en séparant les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$, que la variable $Z = X - Y$ admet pour densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda|x|}$$

3. Démontrer que la variable aléatoire $T = |Z|$ est à densité et en déterminer une densité.