CH XXII : Espaces vectoriels

I. Structure vectorielle

I.1. Définition

Définition
Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne** $\top$ sur l'ensemble E est une application $\top : E \times E \to E$. Autrement dit : $\forall (x,y) \in E^2,\ x \top y \in E$.
- Une **loi de composition externe** $*$ sur l'ensemble E est une application $* : \mathbb{R} \times E \to E$. Autrement dit : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ \lambda * x \in E$.

Exemple
Notons $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Cet ensemble possède une loi de composition interne (que l'on a noté +) :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Cet ensemble possède une loi de composition interne (que l'on a noté ·) :

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Définition
Un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si :

1) E est muni d'une loi + qui vérifie les propriétés suivantes.

a) + est une loi de composition interne

b) $\forall (x,y) \in E^2,\ x + y = y + x$ *(commutativité)*

c) $\forall (x,y,z) \in E^2,\ x + (y+z) = (x+y) + z$ *(associativité)*

d) $\exists\ 0_E \in E$ tel que : $\forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$ *(élément neutre)*

e) $\forall x \in E, \exists y \in E,\ x + y = y + x = 0_E$ *(y opposé de x)*

2) E est muni d'une loi · qui vérifie les propriétés suivantes.

a) · est une loi de composition externe

b) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in E^2,\quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

c) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in E^2,\quad (\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

d) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E,\quad (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

e) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E,\quad 1 \cdot x = x$

Vocabulaire
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- On parle aussi de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. À notre niveau, on pourra même omettre le $\mathbb{R}$ et parler simplement d'espace vectoriel.
- Les éléments de E sont appelés vecteurs.
- Afin de faire la différence entre réels et vecteurs on note souvent les vecteurs à l'aide d'une flèche : $\overrightarrow{x}$.
- L'élément neutre $\overrightarrow{0_E}$ de E est unique.
  On pourra le noter simplement $\overrightarrow{0}$ s'il n'y a pas ambiguïté.
- Si $\overrightarrow{x} \in E$, l'opposé de $\overrightarrow{x}$ par + est unique et est noté $-\overrightarrow{x}$.

Exemple

- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel puisque les lois $+$ et $\cdot$ citées précédemment vérifient les propriétés de la définition.

Remarque

- L'ordre des éléments dans la multiplication externe est important :

$$\cancel{\overrightarrow{x} \cdot \lambda} \qquad \lambda \cdot \overrightarrow{x} \ \checkmark$$

- La définition d'ev ne fait pas apparaître de loi permettant la multiplication de vecteurs. On ne peut donc, a priori, multiplier deux vecteurs entre eux.

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}}$$

Proposition 1.
Soit E un espace vectoriel.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$.

a) $\lambda \cdot \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$

b) $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$

c) $\lambda \cdot (-\overrightarrow{x}) = (-\lambda) \cdot \overrightarrow{x} = -(\lambda \cdot \overrightarrow{x})$

d) $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E} \ \Rightarrow \ \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$

Démonstration.

a) $\lambda \cdot \overrightarrow{0_E} = \lambda \cdot (\overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E}) = \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + \lambda \cdot \overrightarrow{0_E}$. On ajoute alors $\overrightarrow{u}$ l'opposé de $\lambda\overrightarrow{0_E}$ de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{u} & = & \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{0_E} & = & \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E} \ = \ \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} \end{array}$$

b) De même, on remarque $0 \cdot \overrightarrow{x} = (0+0) \cdot \overrightarrow{x} = 0 \cdot \overrightarrow{x} + 0 \cdot \overrightarrow{x}$ et on ajoute l'opposé de $0 \cdot \overrightarrow{x}$ de chaque côté.

c) $\overrightarrow{0_E} = \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} = \lambda \cdot (\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x})) = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \lambda \cdot (-\overrightarrow{x})$ et on ajoute l'opposé de $\lambda \cdot \overrightarrow{x}$ de chaque côté.
De même, $\overrightarrow{0} = O \cdot \overrightarrow{x} = (\lambda + (-\lambda)) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} + (-\lambda)\overrightarrow{x}$.

d) Supposons $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$ et $\lambda \neq 0$. On aura alors : $\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$ d'où $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$.

$\square$

Illustration sur un exemple.
Pour comprendre plus facilement ce que représentent ces propriétés, traduisons-les sur l'exemple simple de $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons tout d'abord que : $\overrightarrow{0_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\lambda \cdot \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = (-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$

d) $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Définition
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m})$ une **famille** de vecteurs de E.

- Un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m}$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_m\overrightarrow{u_m}}$$

II. Sous-espaces vectoriels

II.1. Définition

Définition
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$
Une partie non vide F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

a) $\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2, \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$ *(F est stable pour la loi +)*

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{x} \in F, \quad \lambda \overrightarrow{x} \in F$ *(F est stable pour la loi ·)*

Propriété
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$\boxed{F \text{ est un sev de } E \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{0_E} \in F}$$

Remarque
On utilisera particulièrement la contraposée de cette propriété.

$$\boxed{\overrightarrow{0_E} \notin F \quad \Rightarrow \quad F \text{ n'est pas un sev de } E}$$

Notons $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x + y + z = 1\}$.

Alors F n'est pas un sev de E. En effet, $\overrightarrow{0_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$.

Proposition 2 (Caractérisation des sev de E)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{F \textit{ est un sous-espace vectoriel de } E \textit{ :}} \\ \textit{ssi} & \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2, \quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{y} \in F \\ \textit{ssi} & \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2, \quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F \end{array}}$$

(F est stable par combinaison linéaire d'éléments de F)

Démonstration.

1) ($\Rightarrow$) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2$. Comme F est stable par la loi $\cdot$, on a $\lambda \cdot \overrightarrow{x} \in F$ et $\mu \cdot \overrightarrow{y} \in F$. Comme F est stable par la loi $+$, on a $\lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{y} \in F$.
($\Leftarrow$) La propriété étant vraie pour tout couple (λ, μ) elle l'est pour $\lambda = \mu = 1$, ce qui montre la stabilité de F par la loi $+$. En prenant seulement $\mu = 0$, on prouve que F est stable pour la loi $\cdot$

2) Démonstration similaire.

□

Proposition 3.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$\boxed{F \textit{ sous-espace vectoriel de } E \quad \Rightarrow \quad F \textit{ est un espace vectoriel}}$$

Démonstration.
$+$ est une loi de composition interne pour F (par stabilité).
$\cdot$ est une loi de composition externe pour F (par stabilité).
De plus, ces deux lois vérifient les axiomes des espaces vectoriels puisqu'elles font déjà de E un espace vectoriel. □

Exemple

- Si E est un ev, $\{\overrightarrow{0_E}\}$ et E sont des sev de E.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel *(pour le démontrer : montrer que tous les axiomes sont vérifiés)*.
  L'ensemble des fonctions réelles bornées / polynômes / paires sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et sont donc eux-mêmes des espaces vectoriels.
- $\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x_1 + 2x_2 - x_1 = 0\}$ est un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel
Afin de montrer que F est un ev, il existe deux grandes méthodes.

1) Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel : plutôt long et pénible.

2) Montrer que F est en fait un sev d'un ev E : plus simple et rapide !
On doit alors démontrer que :

(i) $F \subseteq E$

(ii) $F \neq \varnothing$: on montre généralement que $\overrightarrow{0_E} \in F$

(iii) Si $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2, \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$

(iv) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x} \in F, \quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} \in F$

Étant donnée la propriété précédente, les points (iii) et (iv) peuvent être remplacés par la propriété équivalente :

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2, \quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$

Illustration sur un exemple (fondamental !)

- Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x_1 + 2x_2 - x_1 = 0 \right\}$ est un ev.
- Généralisation. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On considère :

$$F = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$$

Montrons que l'ensemble F est un sev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (et donc un ev).

(i) $F \subseteq E$.

(ii) F est non vide : en effet le vecteur nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une solution du système $MX = 0$.

(iii) Si X_1 et X_2 sont deux solutions du systèmes, alors $X_1 + X_2$ est aussi solution du système car $M(X_1 + X_2) = MX_1 + MX_2 = 0$.

(iv) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ solution du système alors λX est une solution du système car $M(\lambda X) = \lambda MX = 0$.

II.2. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit A une partie <u>non vide</u> de E ($A \subseteq E$).

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A et on note $\mathrm{Vect}\,(A)$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'éléments de A. Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(A) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{a_i} \mid p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, (\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_p}) \in A^p\}}$$

- Si de plus, $A = \{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}\}$ (*i.e.* A fini),

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{a_i} \quad \middle| \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\}}$$

(on note $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m})$ *en lieu et place de* $\mathrm{Vect}\,(\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}\})$*)*

On suppose seulement que A est une partie non vide de E.
En aucun cas on ne suppose que A est un espace vectoriel.
$\mathrm{Vect}\,(A)$ est le vectorialisé de A. Partant d'une partie A, on lui ajoute tous les éléments lui permettant d'obtenir une structure vectorielle :

- pour tout $a \in A$, on ajoute tous les λa avec $\lambda \in \mathbb{R}$,
- une fois ces ajouts effectués, on ajoute toutes les sommes finies d'éléments de cette nouvelle partie.

En somme, partant de A, on ajoute toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A. On obtient ainsi un espace vectoriel : c'est $\mathrm{Vect}\,(A)$.

Propriété
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit A une partie non vide de E ($A \subseteq E$).

1) $\overrightarrow{0_E} \in \text{Vect}(A)$.

2) $A \subseteq \text{Vect}(A)$.

3) $\boxed{\text{Vect}(A) \text{ est le plus petit sev de } E \text{ contenant } A.}$

4) $\boxed{A \text{ est un ev} \Leftrightarrow A = \text{Vect}(A).}$

5) On a notamment : $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

6) $A \subseteq B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.

Démonstration.

1) En prenant $p = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\overrightarrow{a} \in A$, on obtient $0 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0_E} \in \text{Vect}(A)$.

2) En prenant $p = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\overrightarrow{a} \in A$, on obtient $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \in \text{Vect}(A)$.

3) $\text{Vect}(A)$ est bien un sev de E car c'est une partie non vide de E, stable par $+$ et $\cdot$. De plus, on remarque que tout sev de E qui contient A doit contenir toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A (par définition d'ev) et doit donc contenir $\text{Vect}(A)$.

4) ($\Rightarrow$) Si A est un ev, alors A est le plus petit ev de A contenant A. Ainsi, $\text{Vect}(A) = A$.
($\Leftarrow$) Si $A = \text{Vect}(A)$, comme $\text{Vect}(A)$ est un ev, alors A est un ev.

5) $\text{Vect}(A)$ est un ev donc $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

6) Supposons $A \subseteq B$ et soit $\overrightarrow{x} \in \text{Vect}(A)$.
Alors $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{a_i}$ pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_p}) \in A^p$.
Comme $A \subseteq B$, pour tout i on a $\overrightarrow{a_i} \in B$ et donc $\overrightarrow{x} \in \text{Vect}(B)$. □

Exemple

- Si $A = \{\overrightarrow{0}\}$, on a $\text{Vect}(A) = A = \{\overrightarrow{0}\}$.
- Si $A = \{\overrightarrow{a}\}$ avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\text{Vect}(A) = \{\lambda \overrightarrow{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
  On notera simplement $\text{Vect}(\overrightarrow{a})$ au lieu de $\text{Vect}(\{\overrightarrow{a}\})$.
- Si $A = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ alors on a :
  $\text{Vect}(A) = \{\lambda \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} \mid (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
  On notera simplement $\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ au lieu de $\text{Vect}\left(\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}\right)$.
- On a notamment :
$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2y \text{ et } z = -y \right\} \\ = &\left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$
- Et aussi :
$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 2y + z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y, z) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \right\} \\ = &\left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ = &\ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ = &\ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Proposition 4.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Soit A une partie non vide de E ($A \subseteq E$).

1) *Si $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0_E}$, on a* $\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{0_E}\right) = \text{Vect}(\overrightarrow{a})$.

2) *De manière générale, on a :*

$$\boxed{\overrightarrow{u_{m+1}} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_s}) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_{s+1}}) \\ = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_s}) \end{array}}$$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\boxed{\text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \lambda \overrightarrow{u_i}, \dots, \overrightarrow{u_s}) = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_i}, \dots, \overrightarrow{u_s})}$

Démonstration.

2) $(\supseteq)$ Évident.

$(\subseteq)$ Si $\overrightarrow{u} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{a_{m+1}}\right)$, alors $\overrightarrow{u}$ s'écrit $\overrightarrow{u} = \sum\limits_{i=1}^{m+1} \lambda_i \overrightarrow{a_i}$. Or $\overrightarrow{a_{m+1}} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}\right)$ donc $\overrightarrow{a_{m+1}} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i \overrightarrow{a_i}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{a_i}\right) + \lambda_{m+1}\ \overrightarrow{a_{m+1}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{a_i}\right) + \lambda_{m+1} \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i \overrightarrow{a_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_i + \lambda_{m+1}\ \mu_i\right) \overrightarrow{a_i} \end{aligned}$$

et donc $\overrightarrow{u} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}\right)$.

□

II.3. Base d'un sous-espace vectoriel

Définition

Soit E un espace vectoriel.

- On dira qu'une famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) \in E^n$ est une **base de** E si pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\ \overrightarrow{e_i}$$

- Autrement dit, $\overrightarrow{x}$ se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$.
- Les réels $(x_1, \ldots, x_p)$ sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple

a) Si on prend $E = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas une base de E.

  En effet, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne peut s'écrire sous la forme $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

  Elle est appelée base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est elle aussi une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas une base de E.

  En effet, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Si on prend $E = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas une base de E.

  En effet, $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne peut s'écrire sous la forme $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

  Elle est appelée base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est elle aussi une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas une base de E.

Interprétation graphique.

a) L'ensemble $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ « n'est rien d'autre » que $\mathbb{R}^2$.
(note : on pourrait exprimer cette correspondance en termes mathématiques précis)

- Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ peut-être vu comme le vecteur directeur de l'axe des abscisses ($\overrightarrow{i}$). $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est alors la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{i}$: c'est l'axe des abscisses.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ peut-être vu comme le vecteur directeur de l'axe des ordonnées ($\overrightarrow{j}$). $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est alors la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{j}$: c'est l'axe des ordonnées.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constitue une base du plan (vectoriel) $\mathbb{R}^2$.
Tout point P de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique sous la forme : $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
x (abscisse) et y (ordonnée) sont les coordonnées du point P.

b) L'ensemble $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ « n'est rien d'autre » que $\mathbb{R}^3$.

- Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ peut-être vu comme le vecteur directeur de l'axe des abscisses ($\overrightarrow{i}$). $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est alors la droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{i}$: c'est l'axe des abscisses.
- De même, $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont deux plans dont l'intersection est la droite vectorielle $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
- $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constitue une base de l'espace $\mathbb{R}^3$. Tout point P de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique sous la forme : $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ avec x (abscisse), y (ordonnée) et z (cote), coordonnées du point P.

c) De même, $\mathbb{R}^4$ s'identifie à $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, espace de dimension 4.

d) Et aussi $\mathbb{R}^5$ espace vectoriel de dimension 5.

e) ...

Proposition 5.
Soit E un espace vectoriel.

$$\boxed{\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}) \in E^n \textit{ une base de } E \quad \Rightarrow \quad E = \text{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})}$$

Démonstration.
Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, tout élément $\overrightarrow{x}$ se décompose (de manière unique) comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$ donc appartient à $\text{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. □

Remarque
Il n'y a pas équivalence. Par exemple, si on prend $E = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Alors $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas une base de E.

Définition

Soit E un espace vectoriel.

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de E.

- La famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est dite **génératrice** si :

$$E = \text{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$$

  Autrement dit, si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille.

- La famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est dite **libre** si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

  On dira aussi que les vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ sont **linéairement indépendants** : aucun des $\overrightarrow{e_i}$ ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire (non triviale) des autres vecteurs.

Proposition 6.

Soit E un espace vectoriel.

La famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ de E est une base de E	$\Leftrightarrow$	***1)*** *C'est une famille génératrice.* ***2)*** *C'est une famille libre.*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Si $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de E, alors elle est génératrice (c'est l'objet de la proposition 5). Il reste donc à démontrer que cette famille est libre. Supposons qu'il existe une relation de dépendance linéaire entre les $\overrightarrow{e_i}$; soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet tel que :

$$\lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$$

On exprime ainsi $\overrightarrow{0}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. La famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ étant une base de E, le vecteur $\overrightarrow{0}$ admet décomposition unique dans $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. Or $\overrightarrow{0}$ s'écrit aussi comme : $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{e_1} + \dots + 0\overrightarrow{e_n}$. On en déduit que ces deux décompositions sont identiques. Ainsi, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est bien libre.

($\Leftarrow$) Si la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est génératrice alors tout élément $\overrightarrow{x}$ de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. Il suffit donc de montrer que cette décomposition est unique. Supposons donc que $\overrightarrow{x} \in E$ admettent deux décompositions différentes :

$$\begin{array}{ccccccc} \overrightarrow{x} & = & \lambda_1 \overrightarrow{e_1} & + & \dots & + & \lambda_n \overrightarrow{e_n} \\ \overrightarrow{x} & = & \beta_1 \overrightarrow{e_1} & + & \dots & + & \beta_n \overrightarrow{e_n} \end{array}$$

où les λ_i et β_i sont des réels. Par soustraction, on a alors :

$$\overrightarrow{0} \;=\; (\lambda_1 - \beta_1)\overrightarrow{e_1} \;+\; \dots \;+\; (\lambda_n - \beta_n)\overrightarrow{e_n}$$

Comme $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une famille libre on obtient que : $\lambda_1 - \beta_1 = \dots = \lambda_n - \beta_n = 0$. D'où $\lambda_i = \beta_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ce qui conclut la démonstration. $\square$

Théorème 1.
Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{\overrightarrow{0_E}\}$.

- *Si E admet une base $\mathcal{B}$ de cardinal fini $n \in \mathbb{N}$, alors toutes les bases de E sont finies et de cardinal n.*
- *Ce nombre n est appelé **dimension de l'espace vectoriel** E, noté $\dim E$.*
- *Par convention, on note $\dim(\{\overrightarrow{0_E}\}) = 0$.*

Démonstration.
Ce n'est pas un attendu du programme de première année.
On ne développera donc pas la démonstration ici. □

Remarque

- $\dim\left(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) = 2$.
- $\dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = 3$.
- $\dim\left(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\right) = 4$.

III. Application linéaires

III.1. Définition

Définition
Soient E et F deux espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, & f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{x} \in E^2, & f(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}) \end{array}\right.}$$

  (compatibilité pour les lois + et ·)
- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.

Proposition 7 (Caractérisation des applications linéaires)**.**
Soient E et F deux espaces vectoriels.
Une application $f : E \to F$ est linéaire ssi :

$$\boxed{\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, \qquad f(\lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}) + \mu \cdot f(\overrightarrow{y})}$$

On peut aussi énoncer la propriété équivalente :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, \qquad f(\lambda \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})}$$

Démonstration.
C'est un bon exercice. La méthode est similaire à celle utilisée dans la démonstration de la proposition 2. □

Propriété
Soient E et F deux espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors :

1) $f(\overrightarrow{0_E}) \ = \ \overrightarrow{0_F}$

2) $\forall \overrightarrow{x} \in E, f(-\overrightarrow{x}) = -f(\overrightarrow{x})$

3) $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}) \in E^n,$

$$f(\lambda_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + \cdots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{x_n}) = \lambda_1 \cdot f(\overrightarrow{x_1}) + \cdots + \lambda_n \cdot f(\overrightarrow{x_n})$$

(compatibilité de f avec les combinaisons linéaires)

Remarque
Une application linéaire est donc à la fois convexe et concave.

Exemple

- L'application nulle de E dans F, définie par $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}$ pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ est une application linéaire.
- L'application identité de E, définie par $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ est une application linéaire.
- Considérons $E = \mathbb{R}$ et des applications $f : E \to E$.

  a) L'application $f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \right.$ est linéaire.

  b) L'application $f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.
  En effet, $f(0) = 1 \neq 0$.

  c) L'application $f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x \end{array} \right.$ est une application linéaire.
  En effet, $f(0) = 1 \neq 0$.

  d) L'application $f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+2 \end{array} \right.$ n'est pas linéaire.
  En effet, $f(0) = 2 \neq 0$.

- Exemple fondamental. Si $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, alors :

  L'application f définie par $f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$ est linéaire.

Théorème 2.
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Toute application linéaire f de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est de la forme :

$$f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

Démonstration.
Notons $\mathcal{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ la base canonique de $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Notons $\mathcal{B}_F = (\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_p})$ la base canonique de $F = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sur la base $\mathcal{B}_E$: $\quad X \ = \ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ \ldots \ + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ = \ x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \ \ldots \ + x_n \cdot \overrightarrow{e_n}$
Par application de la fonction f, linéaire, on obtient :

$$f(X) \ = \ x_1 \cdot f(\overrightarrow{e_1}) + \ \ldots \ + x_n \cdot f(\overrightarrow{e_n})$$

Ainsi, $f(X)$ ne dépend que des valeurs des $f(\overrightarrow{e_i})$: l'image de la fonction f est uniquement déterminée par la valeur de f sur les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$. En fait, f peut s'écrire sous la forme matricielle $f : X \mapsto MX$ où M est la matrice obtenue en concaténant les vecteurs $f(\overrightarrow{e_i})$.

$$\begin{array}{ccccccc} M & = & (& f(\overrightarrow{e_1}) & , \ \ldots \ , & f(\overrightarrow{e_n}) &) \\ & & & \shortparallel & & \shortparallel & \\ & & (& \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} & , \ \ldots \ , & \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} &) \end{array}$$

En effet, avec cette notation, on a : $M\overrightarrow{e_i} = f(\overrightarrow{e_i})$. □

III.2. Noyau d'une application linéaire

Définition
Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On appelle **noyau de** f et on note $\operatorname{Ker} f$ l'ensemble :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{x} \in E \mid f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}\}}$$

Théorème 3.
Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $\operatorname{Ker} f \subseteq E$ (évident) et $\operatorname{Ker} f \neq \varnothing$: $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$ donc $\overrightarrow{0_E} \in \operatorname{Ker} f$,
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in (\operatorname{Ker} f)^2$, alors $\overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y} \in \operatorname{Ker} f$ car :
  $f(\overrightarrow{x} + \lambda \cdot \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + \lambda \cdot f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0_F} + \lambda \cdot \overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$. □

Exemple
Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.
  Alors $\operatorname{Ker} f = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$.
  Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des solutions du système homogène $MX = 0$.
  (n inconnues et p équation)
- Il faut savoir reconnaître les ensembles représentant des noyaux.
  Par exemple, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2y \text{ et } z = -y \right\} = \operatorname{Ker} f$ où l'application linéaire f est définie par :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut écrire ce noyau comme espace vectoriel engendré par une partie.

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$ est un ev.
  En effet, c'est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut écrire ce noyau comme espace vectoriel engendré par une partie.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Théorème 4.
Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\boxed{f \text{ injective} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{0_E}\}}$$

Démonstration.
($\Rightarrow$) Comme f linéaire, $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$. Comme f est injective, s'il existe un autre vecteur $f(\overrightarrow{x})$ tel que $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}$, c'est que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$.

($\Leftarrow$) Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ tel que $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{y})$. On a alors : $f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0_F}$, ce qui s'écrit $f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0_F}$. Ainsi, $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \in \operatorname{Ker} f$, d'où $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0_E}$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$. □

III.3. Image d'une application linéaire

Définition
Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle **image de** f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \{\overrightarrow{y} \in F \mid \exists \overrightarrow{x} \in E,\ y = f(\overrightarrow{x})\}}$$

Théorème 5.
Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

- $\operatorname{Im} f \subseteq F$ (évident) et $\operatorname{Im} f \neq \varnothing$: $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$ donc $\overrightarrow{0_F} \in \operatorname{Im} f$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2) \in (\operatorname{Im} f)^2$, alors il existe $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2) \in E^2$ tel que $y_1 = f(\overrightarrow{x_1})$ et $y_2 = f(\overrightarrow{x_2})$. Alors $\overrightarrow{y_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{y_2} \in \operatorname{Im} f$ car :
$\overrightarrow{y_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{y_2} = f(\overrightarrow{x}_1) + \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}_2) = f(\overrightarrow{x}_1 + \lambda \cdot f(\overrightarrow{x}_2))$. □

Exemple
Reprenons l'exemple fondamental.

- Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$.
Alors $\operatorname{Im} f = \{Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ Y = MX\}$. Ainsi, $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des seconds membres Y tels que le système $MX = Y$ admet une solution.
- Il faut savoir reconnaître les ensembles écrits comme des images.
Par exemple, $F = \{ \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\} = \operatorname{Im} f$
où l'application linéaire f est définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut écrire cette image comme espace vectoriel engendré par une partie.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Théorème 6.
Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \textit{ surjective} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F}$$

Démonstration.
On ne fait que rappeler ici le résultat obtenu dans le chapitre Ensembles et applications. □

Remarque
Évidemment, dans le cas où l'application linéaire f est à la fois injective et bijective, on dit que f est bijective. Une application linéaire est avant tout une application (tout court) et les résultats obtenus dans le chapitre *Ensembles et applications* s'appliquent aux applications linéaires.

Théorème 7.
Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.
Alors $\operatorname{Im} f$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n}))$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n}))}$$

Démonstration.
($\subseteq$) Soit $\overrightarrow{y} \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$. Dans la base $\mathcal{B}$, $\overrightarrow{x}$ s'écrit : $\quad \overrightarrow{x} = x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + x_n \cdot \overrightarrow{e_n}$
On a donc : $\quad f(\overrightarrow{x}) = x_1 \cdot f(\overrightarrow{e_1}) + \dots + x_n \cdot f(\overrightarrow{e_n})$.
Ainsi, $\overrightarrow{y} \in \operatorname{Vect}(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n}))$
($\supseteq$) Chacun des vecteurs $f(\overrightarrow{e_i})$ est dans $\operatorname{Im} f$, ce qui suffit à démontrer l'inclusion. □

Remarque
On a déjà utilisé cette propriété sans la citer. En effet, si l'on considère de nouveau l'application linéaire f :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors $\operatorname{Im} f$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{Vect} \left(\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right) \\ &= \operatorname{Vect} \left(f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right) \end{aligned}$$

III.4. Conclusion : montrer qu'un ensemble F est un ev

Nous pouvons maintenant compléter notre liste de méthodes permettant de montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel.

1) Revenir à la définition et vérifier tous les axiomes.
Long et pénible – à éviter.

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel F d'un ev E.
Méthode classique (fonctionne toujours !) à connaître absolument.

3) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_m})$.
Plus élégant et rapide.

4) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \operatorname{Ker} f$
où f est une application linéaire.
Plus élégant et rapide.

5) Montrer que F s'écrit sous la forme : $F = \operatorname{Im} f$
où f est une application linéaire.
Tout aussi élégant et rapide.