Feuille d'exercices n°22 : Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels (sev)

Exercice 1. ($\bigstar$)
Pour chacun des espaces vectoriels E et des parties F, dire si F est un sous espace vectoriel de E.

a. E est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($= \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).
F est l'ensemble des fonctions paires.

b. E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites divergentes.

c. E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites convergentes.

d. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
F est l'ensemble des fonctions f vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
(autrement dit, des fonctions f telles que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$).

e. $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes.
F est l'ensemble contenant le polynôme nul et les polynômes de degré supérieur ou égal à 3.

Exercice 2. ($\bigstar\bigstar$)
Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E.

a. Démontrer que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.

b. On note $F + G = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \in F,\ \overrightarrow{v} \in G\}$.
Démontrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

c. Démontrer que $F \cap G \subset F \subset F + G$ et $F \cap G \subset G \subset F + G$.

d. Démontrer que, de manière générale, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
(on pourra considérer $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ *et* $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$*)*

e. Que dire de $F \cup G$ si $F \subset G$ ou $G \subset F$?

Sev engendré par une partie

Exercice 3. ($\bigstar$)
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
On considère $\overrightarrow{u} = (2, 1, -3)$, $\overrightarrow{v} = (3, 2, -1)$, $\overrightarrow{s} = (1, 0, -5)$ et $\overrightarrow{t} = (1, 1, 2)$.
Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\right)$.

Exercice 4. ($\bigstar$)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E.

a. Montrer que si $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ alors $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

b. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}\right)$.

c. $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est-elle libre ?

Base d'un sev

Exercice 5. ($\bigstar$)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

a. Montrer que $((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 3), (1, 0, 3, 3))$ en est une base.

b. Quelles sont les coordonnées de $(1, 0, 0, -1)$ dans cette base ?

Exercice 6. ($\bigstar\bigstar\bigstar$)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.

a. Montrer que $(1, 1+X, (1+X)^2, (1+X)^3)$ en est une base.

b. Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

c. Montrer que :
$((X-1)(X-2)(X-3), X(X-2)(X-3), X(X-1)(X-3), X(X-1)(X-2))$
est aussi une base.

d. Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

Exercice 7. ($\bigstar\bigstar\bigstar$)
On note $E = \mathbb{R}_4[X]$.
Si F et G sont deux ev, on note $F + G = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \in F,\ \overrightarrow{v} \in G\}$.

a. Montrer que l'ensemble F des polynômes pairs de E est un sous espace vectoriel de E, et en donner une base.

b. Même question avec l'ensemble G des polynômes impairs de E.

c. Montrer que $F \cap G = \{0\}$ et que $F + G = E$.

Exercice 8. ($\bigstar$)
Donner une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions (x, y, z, t) du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & t & & & = & 0 \\ x & - & 3y & & & + & 9z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & - & t & + & 18z & = & 0 \end{array}\right.$$

Applications linéaires

Exercice 9. ($\bigstar\bigstar$)
Montrer que les applications suivantes sont linéaires.
Déterminer leur noyau et leur image.

a. $\begin{array}{rccc} u : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f' - f \end{array}$

b. $\begin{array}{rccc} v : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(1) \end{array}$

Exercice 10. ($\bigstar$)
Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

a.

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y + z \end{pmatrix} \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2xy \\ x - z \end{pmatrix} \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{rccc} h : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & (2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3) \end{array}$$

Exercice 11. ($\bigstar$)
Montrer que les applications f_i suivantes sont linéaires.
Calculer $\operatorname{Ker} f_i$ et en donner une base.
Calculer $\operatorname{Im} f_i$ et en donner une base.

a.

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

b.

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

c.

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

d.

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

e.

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & (3x_1 + x_2 - x_3) \end{array}$$

f.

$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & (3x_1) \end{array}$$

g.

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 12. (★★★)
On note E l'ensemble des suites bornées et f l'application de E dans E qui à une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Démontrer que E est un sous espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

b. Montrer que f est bien définie et est linéaire.

c. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

d. Existe-t-il $u \in E$ non nul tel que $f(u) = u$?

e. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer les solutions de l'équation $f(u) = \lambda u$.

f. Pour quels λ cette équation a-t-elle des solutions non nulles ?

Exercice 13. (★★)
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$.

a. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

c. Démontrer l'égalité $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 14. (★★)
On pose $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

a. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_4[X])$.

b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

c. Démontrer l'égalité $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_4[X]$.

Dans la suite, si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^2 = fof$.
Autrement dit, pour $x \in E$, on a $f^2(x) = f(f(x))$ et pas $f(x) \times f(x)$.

Exercice 15. (★)
Soit $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $p(x, y) = \frac{1}{5}(4x + 2y, 2x + y)$.

a. Calculer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$.

b. Montrer que $p^2 = p$.

Exercice 16. (★★★)
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

a. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

c. Montrer que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.

d. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 17. (★★)
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.

a. Montrer que si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$, alors $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u^3$.

b. Montrer que si $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$, alors $\operatorname{Im} u^3 = \operatorname{Im} u^2$.

Exercice 18. (★)
On reprend l'application p de l'exercice **14**.

a. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer les solutions u de l'équation $p(u) = \lambda u$.

b. Pour quels λ cette équation a-t-elle des solutions non nulles ?