CH III : Fonctions usuelles

L'étude des fonctions polynomiales et notamment les considérations sur la recherche de racines, la factorisation et le signe du trinôme du second degré ont été traitées dans le chapitre précédent.

I. Quelques rappels sur l'étude de fonctions

I.1. Étude graphique de fonctions

La méthodologie d'étude d'une fonction f (dérivable) est la suivante.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction (si celui-ci n'est pas donné).

2) Calcul de f' (là où f est dérivable).

3) Construction du tableau de variations de f (étude du signe de f').

4) Étude des limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.

5) Calcul des tangentes de f en certains points (généralement l'énoncé précise ces points).
(on y reviendra dans un chapitre ultérieur ...)

6) Étude graphique : dans un repère, on place :
- × les points particuliers (ceux dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$),
- × les droites particulières (tangentes) de la courbe.
- × on peut éventuellement placer des points supplémentaires.

On trace alors $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

I.2. Règles de dérivation

Pour f, g des fonctions réelles, pour $a \in \mathbb{R}$, les égalités suivantes sont vérifiées sur les ensembles où les fonctions f et g sont dérivables.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (af)' & = & af' \\ (f+g)' & = & f'+g' \\ (f\times g)' & = & f'g+fg' \\ \left(\dfrac{1}{g}\right)' & = & \dfrac{-g'}{g^2} \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)' & = & \dfrac{f'g-fg'}{g^2} \end{array}}$$

Pour les règles de dérivation de l'inverse et du quotient, il faut ici veiller à se placer sur un ensemble E sur lequel g ne s'annule pas.

Remarque
Cette liste n'est pas exhaustive et il faudra la compléter avec les règles que l'on verra dans l'année. Par exemple : $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ est vérifiée pour f sur tout ensemble E où f est dérivable et strictement positive.

I.3. Théorème de la bijection

I.3.a) Un premier théorème

Théorème 1.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction :
- × *continue sur $[a,b]$.*
- × *strictement croissante sur $[a,b]$.*

On a alors :

$$\boxed{\forall y \in [f(a), f(b)], \exists! c \in [a,b],\ y = f(c)}$$

Autrement dit :

- Pour y fixé dans $[f(a), f(b)]$ l'équation en x : $y = f(x)$ a une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.
- Ou encore, tout élément y dans $[f(a), f(b)]$ possède un unique antécédent par f dans $[a, b]$.

Remarque

Ce théorème est aussi connu sous le nom de **T**héorème des **V**aleurs **I**ntermédiaires (cas de la stricte monotonie). Des énoncés similaires existent :

× pour tout type d'intervalle ($[a, b[$, $]a, b[$, $]a, b]$).

× lorsque f strictement décroissante. Dans ce cas, la conclusion est :

$$\boxed{\forall y \in [f(b), f(a)], \exists! c \in [a, b],\ y = f(c)}$$

(et on peut encore prendre tout type d'intervalle ...)

I.3.b) Les fonctions bijectives

Définition *Fonction bijective*

Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Soit $f : E \to F$ une fonction.

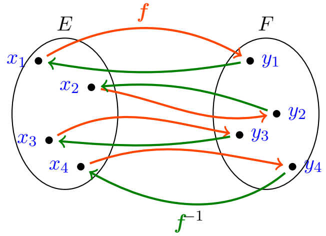
- On dit que f est une bijection de E sur F si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists! x \in E,\ y = f(x)}$$

- Si $f : E \to F$ définit une bijection de E sur F, alors elle permet de définir la fonction qui à tout réel $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f dans l'ensemble E. Cette fonction est notée $f^{-1} : F \to E$ et est appelée **fonction réciproque** de f.
(faire un dessin !)

Représentation graphique.

Soit $f : E \to F$ une application bijective de E sur F.



- Par définition de la bijectivité, tout élément y_i de F possède un unique antécédent x_j dans E par f.
- Par définition de fonction, tout élément x_j de E ne possède qu'une image y_i dans F.

De manière non formelle, si $f : E \to F$ est une bijection de E sur F, alors il y a « exactement autant » d'éléments dans E et dans F.
Graphiquement, cela se traduit par le fait que l'on peut relier les x_j au y_i :

× par les flèches rouges. C'est la fonction $f : E \to F$.

× par les flèches vertes, obtenues en orientant dans l'autre sens les flèches rouges. C'est la fonction $f^{-1} : F \to E$.

Propriété

Soit $f : E \to F$ une bijection de E sur F.

Et $f^{-1} : F \to E$ sa réciproque.

On a alors :

1) $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F,\ (y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y))}$

2) $\boxed{\forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y}$

3) $\boxed{\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x}$

4) $f^{-1} : F \to E$ est une bijection de F sur E.

Démonstration.

1) Soient $x \in E$ et $y \in F$.
($\Rightarrow$) Supposons $y = f(x)$. Autrement dit, x est un antécédent (il est unique puisque f est bijective) de y par f. Or, par définition, f^{-1} associe à chaque élément $y \in F$ son unique antécédent dans E par f : c'est précisément x. Cela démontre que $f^{-1}(y) = x$.

($\Leftarrow$) Supposons $x = f^{-1}(y)$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans l'ensemble E de l'élément y par la fonction f. On a donc $y = f(x)$.

2) Soit $y \in F$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique x dans E tel que $y = f(x)$. Ainsi, $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

3) Soit $x \in E$. Notons $y = f(x)$. On a donc $x = f^{-1}(y)$ (d'après la propriété ***1)***). Ainsi, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

4) On doit démontrer que : $\forall v \in E, \exists ! u \in F,\ v = f^{-1}(u)$.
Soit $v \in E$. D'après la propriété ***3)***, $f^{-1}(f(v)) = v$. Ainsi, en notant $u = f(v)$, on a bien trouvé un élément $u \in F$ tel que $f^{-1}(u) = v$. Il reste à démontrer l'unicité. S'il existe $t \in F$ tel que $f^{-1}(t) = v$, alors par la propriété ***1)***, on a $t = f(v)$. Ainsi, $t = f(v) = u$.

$\square$

Remarque
Soit $f : E \to F$ une fonction bijective de E dans F et $x \in E$, $y \in F$ deux éléments tels que $y = f(x)$. D'après la propriété ***1)***, on a alors aussi $x = f^{-1}(y)$. On a donc :

- × x est l'antécédent de y par f.
- × y est l'image de x par f.
- × x l'image de y par f^{-1}.
- × y est l'antécédent de x par f^{-1}.

I.3.c) Le théorème de la bijection

Théorème 2. *Théorème de la bijection*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction :

- × *continue sur $[a, b]$.*
- × *strictement croissante sur $[a, b]$.*

On a alors :

1) *f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.*

2) *De plus, sa bijection réciproque $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ est :*
- × *continue sur $[f(a), f(b)]$.*
- × *strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$.*

Démonstration.

1) C'est l'énoncé du TVI traduit avec le vocabulaire des fonctions bijectives.

2) On en reparlera ... $\square$

Remarque
Les extensions précédentes peuvent aussi être appliquées à ce théorème : on peut l'écrire avec des intervalles du type $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$; si la fonction f initiale est strictement décroissante, la conclusion sera alors la stricte décroissance de f^{-1}.

Par exemple :

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction : × continue sur $]a, b]$ × strictement décroissante sur $]a, b]$	$\Rightarrow$	• f est une bijection de $]a, b]$ sur $[f(b), f(a)[$ • $f^{-1} : [f(b), f(a)[\to]a, b]$ est : × continue sur $[f(b), f(a)[$ × strictement croissante sur $[f(b), f(a)[$

II. Fonction valeur absolue

II.1. Définition

Définition
On appelle fonction valeur absolue, notée $| \,.\, |$, la fonction suivante.

$$\begin{array}{rccl} | \,.\, | \ : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & |x| \ = \left\{ \begin{array}{rl} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Remarque

- Dans la définition, il est implicite que pour tout *truc* élément de $\mathbb{R}$, la quantité $|truc|$ est positive. En effet :
  × si $truc \geqslant 0$, $|truc|$ vaut $truc$,
  × si $truc < 0$, $|truc|$ vaut l'opposé de $truc$, à savoir $-truc$ (> 0).
- On a notamment les calculs suivants :
  1) $|-5| = 5$ ***2)*** $|(x-2)^2| = (x-2)^2$ ***3)*** $|-(x-2)^2| = (x-2)^2$

Exercice. *(valeur absolue)*
Écrire sans valeur absolue les quantités suivantes.
a. $|x^2+x-2|$ ***b.*** $|x+1|+|x+2|$ ***c.*** $|x^2-1|-|x^2+1|+|2x^2-x+1|$
Traitons la question ***a.***

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
Valeur de $\lvert x^2+x-2\rvert$		x^2+x-2		$-x^2-x+2$	0	x^2+x-2	

On retiendra l'intérêt de faire un tableau qui est une représentation lisible de la situation.

II.2. Propriétés

Propriété

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{|x| \geqslant 0}$ ***2.*** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{|x| = |-x|}$
(ceci signifie que la fonction $| \,.\, |$ est paire)

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{|x| = 0 \ \Rightarrow \ x = 0}$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $\boxed{|x| = |y| \ \Rightarrow \ x = y \ \texttt{OU} \ x = -y}$

5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $\boxed{|x \times y| = |x| \times |y|}$

6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}}$

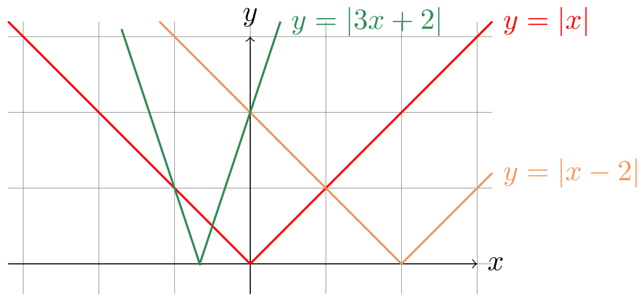
7. **Inégalité triangulaire.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a :
$\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$ $\boxed{|x-y| \leqslant |x| + |y|}$ $\boxed{\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|}$

Propriété de dérivée

1) La fonction $| \,.\, |$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. $\boxed{\forall x \in \,]0, +\infty[, \ (|x|)' = 1}$

2) La fonction $| \,.\, |$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$. $\boxed{\forall x \in \,]-\infty, 0[, \ (|x|)' = -1}$

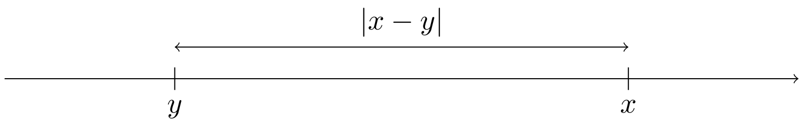
II.3. Représentation graphique



II.4. Interprétation

Interprétation

- Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|x - y|$ est la distance entre les points x et y ($|x - y| = d(x; y)$), autrement dit l'écart entre le point x et le point y sur la droite réelle.

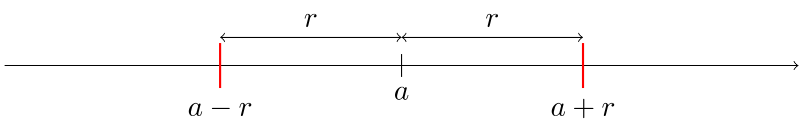


- Ainsi, $|x|$ est la distance entre les points x et 0.

Application
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

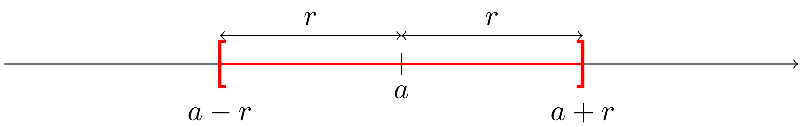
- Résolution de $|x - a| = r$

  Les éléments x vérifiant cette égalité sont les éléments situés à une distance r du réel a. Autrement dit, ce sont les éléments $x = a - r$ et $x = a + r$.



- Résolution de $|x - a| \leqslant r$

  Les éléments x vérifiant cette égalité sont les éléments situés à une distance inférieure (ou égale) à r du réel a. Autrement dit, ce sont les éléments x de l'intervalle $[a - r, a + r]$.



- Ainsi, on a : $\boxed{|x| \leqslant r \ \Leftrightarrow\ -r \leqslant x \leqslant r}$

III. Fonction inverse

Définition
On appelle la fonction inverse la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{1}{.} : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Dans ce qui suit, on notera f la fonction inverse. On réalise l'étude graphique de f à l'aide de la méthodologie présentée en début de chapitre.

1) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \leqslant 0$.
3) Construction du tableau de variations de f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	‖	$-$
Variation de f	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

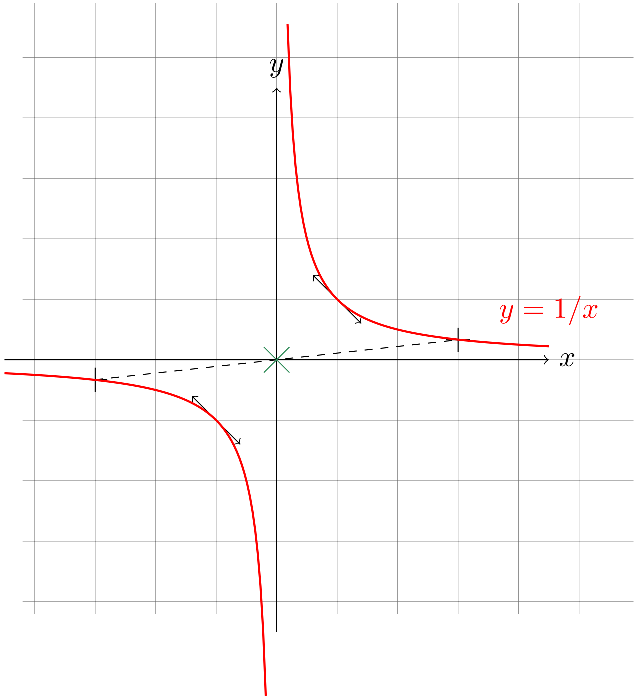
4) Les limites sont affichées dans le tableau de variation.
5) L'équation de la tangente au point d'abscisse a (*i.e.* au point $(a, f(a))$) est donnée par la formule :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

On en déduit que :

× la droite $y = -x + 2$ est la tangente de la fonction au point $(1, 1)$.
× la droite $y = -x - 2$ est la tangente de la fonction au point $(-1, -1)$.

6) **Représentation graphique**



Remarque *Parité et représentation graphique ...*

- Par définition, on dira qu'une fonction f est **impaire** si :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) \ = \ -f(x)}$$

Dans ce cas, on a alors l'équivalence suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -x \\ -f(x) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_f$$

Ainsi, si f est une fonction impaire, sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet le point $(0,0)$ comme centre de symétrie.

- Par définition, on dira qu'une fonction f est **paire** si :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(-x) \ = \ f(x)}$$

Dans ce cas, on a alors l'équivalence suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}_f$$

Ainsi, si f est une fonction paire, sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

- La fonction inverse est impaire puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{1}{-x} \ = \ -\dfrac{1}{x}$.

On en déduit que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère $((0,0))$. Ainsi, le tracé de $\mathscr{C}_f$ sur $]-\infty, 0[$ se déduit, par symétrie, du tracé de $\mathscr{C}_f$ sur $]0, +\infty[$.
On réduit ainsi l'étude de cette fonction à l'ensemble $]0, +\infty[$.

IV. Fonctions puissances entières

IV.1. Définition

Définition *Fonctions puissances (entières)*

- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction élévation à la puissance n est définie comme suit.

$$\begin{array}{rccl} .^n & : & \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \ x^n \ = \ \overbrace{x \times x \times \ldots \times x}^{n-1 \text{ multiplications}} \end{array}$$

- On peut aussi définir l'élévation à une puissance entière négative.

Si $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité x^{-n} est définie par : $\boxed{x^{-n} \ = \ \dfrac{1}{x^n}}$

- Par convention, l'opérateur élévation à la puissance 0 est la fonction constante égale à 1 : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x^0 \ = \ 1}$

IV.2. Propriétés

Propriété

1. $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ x^{m+n} = x^n x^m}$

2. $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ x^{mn} = (x^m)^n}$

3. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ (xy)^n = x^n y^n}$

4. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}^*,\ y^{-n} = \dfrac{1}{y^n} = \left(\dfrac{1}{y}\right)^n}$

5. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}}$

Propriété de dérivée

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

× si $n \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (x^n)' \ = \ n x^{n-1}}$$

× si $n < 0$, la fonction $x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (x^n)' \ = \ n x^{n-1}}$$

(même formule, seule l'ensemble de dérivabilité est modifié)

2. Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ (u^n)' \ = \ n u^{n-1} \times u'}$$

↪ si $n \in \mathbb{N}$, cette règle de dérivation est valable sur tout ensemble où la fonction u est dérivable.

↪ si n est un entier strictement négatif, cette règle de dérivation est valable sur tout ensemble où la fonction u est non nulle et dérivable.

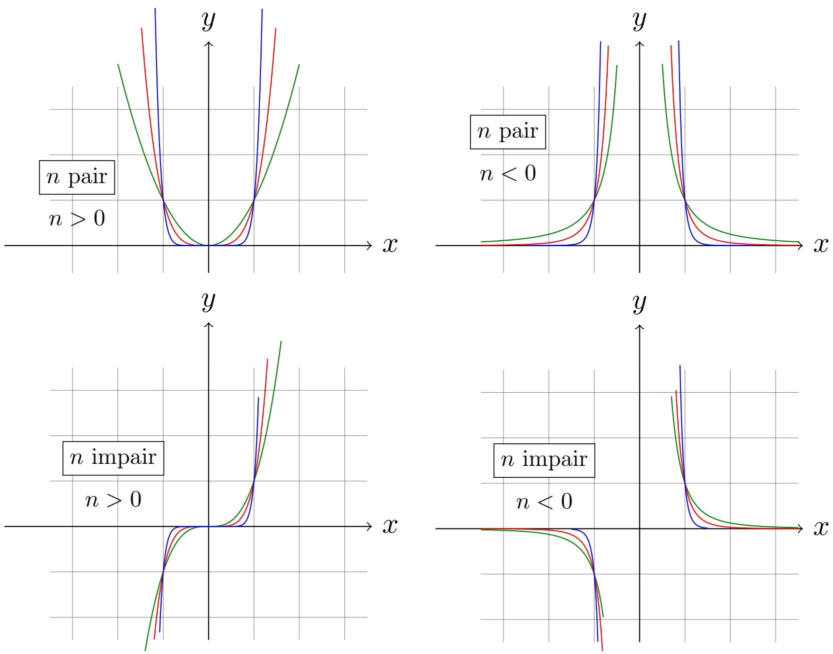
Exercice
Ensemble de dérivabilité et calcul des dérivées des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto (5x^2 + 2x + 7)^3$ ***b.*** $g : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 + 5}$

Étude pour les petites valeurs de n

- Si $n = 2$: la fonction $x \mapsto x^2$ est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Si $n = 3$: la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

IV.3. Représentation graphique



V. Fonction racine carrée

V.1. Définition

Définition

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est :

- continue sur $[0, +\infty[$,
- strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection on a donc :

1) f est une bijection de l'ensemble $[0, +\infty[$ sur l'ensemble :

$$f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)[= [0, +\infty[.$$

2) f admet une bijection réciproque, continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$: c'est la fonction **racine carrée**.

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \sqrt{\cdot} & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}}$$

De par cette définition, on a les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \ (y = x^2 \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt{t})}$

2) $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad (\sqrt{y})^2 = y}$

3) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{(x^2)} = x}$

V.2. Propriété

Propriété

1. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \ \sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}}$

2. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \ \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}}$ *3.* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \sqrt{x^2} = |x|}$

Propriété de dérivée

1. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \ (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

2. Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a : $\boxed{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$

Cette formule est valable sur tout ensemble E sur lequel :

- la fonction u est positive *(pour que $\sqrt{u}$ soit définie)*,
- la fonction u est dérivable *(pour que u' soit définie)*,
- la fonction u ne s'annule pas *(pour que $\frac{1}{\sqrt{u}}$ soit définie)*.

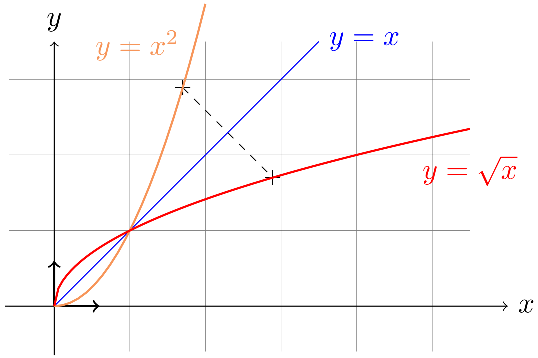
Exercice

Ensemble de dérivabilité et calcul des dérivées des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2}$ ***b.*** $g : x \mapsto \sqrt{(x^2 + 2)^5}$

V.3. Représentation graphique

On obtient la courbe de la fonction $\sqrt{\cdot}$ par symétrie de la courbe élévation au carré par rapport à la droite $y = x$.



Parenthèse : retour sur la fonction inverse
On peut aussi appliquer le théorème de la bijection à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

- × f est continue sur $]0, +\infty[$,
- × f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$,

D'après le théorème de la bijection, on a donc :

1) f est bijection de l'ensemble $]0, +\infty[$ sur l'ensemble :
$f(]0, +\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)[=]0, +\infty[$.

2) Sa bijection réciproque $f^{-1} :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, continue et strictement décroissante n'est rien d'autre qu'elle même ! On a en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 1/(1/x) = x$$

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ admet la droite $y = x$ comme axe de symétrie et on aurait pu limiter l'étude de la fonction inverse à l'intervalle $]0, +\infty[$.

VI. Fonctions logarithme et exponentielle

VI.1. Fonction logarithme

VI.1.a) Définition

Définition

- La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln(.)$ est la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1 de la fonction inverse.
- Autrement dit, c'est la fonction définie par :

$$\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad (\ln(x))' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

VI.1.b) Propriétés

Propriété fondamentale

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$$

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(yx) - \ln(x) - \ln(y)$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivable sur cet ensemble. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\varphi'(x) = \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}x} - \frac{1}{x} = 0$$

Ceci démontre que la fonction φ est constante sur $]0, +\infty[$.
Enfin, on a : $\varphi(1) = \cancel{\ln(y)} - \ln(1) - \cancel{\ln(y)} = \ln(1) = 0$.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \varphi(x) = 0$, ce qui démontre la propriété. □

Il faut faire attention aux ensembles de définitions des propriétés.

- Par exemple, on a : $\ln((-3) \times (-5)) \neq \underbrace{\ln(-3)}_{\text{non déf.}} + \underbrace{\ln(-5)}_{\text{non déf.}}$
- Par contre, $(-3) \times (-5) = 3 \times 5$.
  On a donc : $\ln((-3) \times (-5)) = \ln(3) + \ln(5)$

Propriété immédiates

1. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n \ln(x)}$

2. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$

3. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$

Exercice
Faire l'étude graphique des fonctions :
a. $f : x \mapsto \ln(x^2)$ ***b.*** $g : x \mapsto 2\ln(x)$

Propriété de dérivée

1. La fonction $\ln(.)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\ln(x))' = \dfrac{1}{x}}$

2. Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a : $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$

Cette formule est valable sur tout ensemble E sur lequel :

- $\times$ la fonction u est strictement positive *(pour que* $\ln(u)$ *soit définie)*,
- $\times$ la fonction u est dérivable *(pour que* u' *soit définie)*,
- $\times$ la fonction u ne s'annule pas *(pour que* $\frac{1}{u}$ *soit définie)*.

Exercice
Ensemble de dérivabilité et calcul des dérivées des fonctions suivantes.
a. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 2)$ ***b.*** $g : x \mapsto \ln(\sqrt{(x^2+2)^5})$

Propriété de limite

1. $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty}$ ***2.*** $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty}$

Exercice
Montrer (dans cet ordre !) les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leqslant x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

Croissances comparées

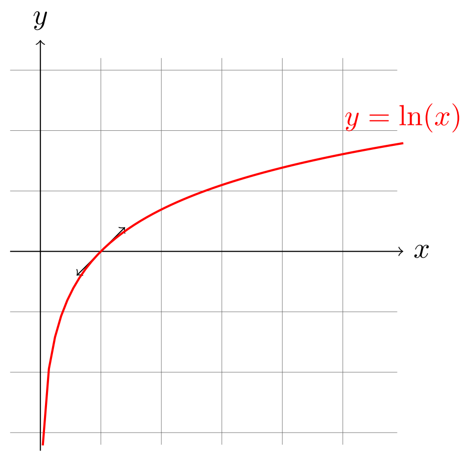
- En $+\infty$, la fonction $\ln(.)$ admet une croissance beaucoup plus faible que les fonctions puissances entières. En d'autres termes, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^p}{x^q} = 0}$$

- On dit aussi qu'en $+\infty$, la croissance logarithmique est plus faible que la croissance polynomiale.
- On peut démontrer, à l'aide de la propriété précédente que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^p\ (\ln(x))^q = 0}$$

VI.1.c) Représentation graphique



VI.2. Fonction exponentielle

VI.2.a) Définition

Définition
La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est :

× continue sur $]0,+\infty[$,

× strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de la bijection on a donc :

1) f est une bijection de l'ensemble $]0,+\infty[$ sur l'ensemble :

$$f(]0,+\infty[) = \left] \lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

2) f admet une bijection réciproque, continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$: c'est la fonction **exponentielle**.

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} \exp & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}}$$

De par cette définition, on a les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R},\ (y = \ln x \ \Leftrightarrow\ x = \mathrm{e}^y)}$

2) $\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^y) = y}$

3) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x}$

VI.2.b) Propriétés

Propriété fondamentale

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y \ \Leftrightarrow\ \ln(\mathrm{e}^{x+y}) = \ln(\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y) \ \Leftrightarrow\ x + y = \underbrace{\ln(\mathrm{e}^x)}_{x} + \underbrace{\ln(\mathrm{e}^y)}_{y} \quad \square$$

Propriété immédiates

1. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}}$

2. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}$

3. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}}$

Propriété de limite

1. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0}$

2. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty}$

Propriété de dérivée

1. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x}$

2. Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a : $\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u}$

Cette formule est valable sur tout ensemble E sur lequel :

× la fonction u est dérivable *(pour que u' soit définie)*.

Croissances comparées

- En $+\infty$, la fonction exp a une croissance beaucoup plus forte que les fonctions puissances entières. En d'autres termes, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\mathrm{e}^x)^p}{x^q} = +\infty}$$

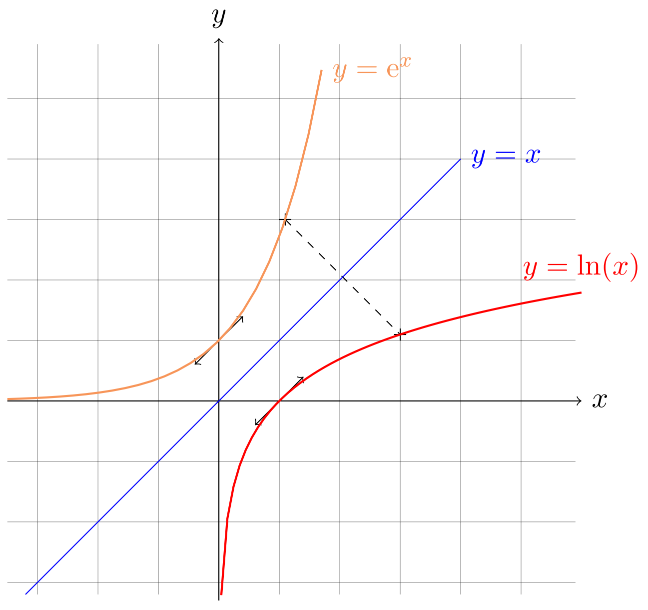
- On dit aussi qu'en $+\infty$, la croissance exponentielle est plus forte que la croissance polynomiale.
- On peut démontrer, à l'aide de la propriété précédente que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^p(\mathrm{e}^{-x})^q = 0}$$

En $-\infty$, cette fonction tend aussi beaucoup plus vite vers 0 que les fonctions élévation à la puissance entière ne tendent vers l'infini.

VI.2.c) Représentation graphique

Les fonctions exponentielle et logarithme étant bijections réciproques l'une de l'autre, la courbe représentative de la fonction exponentielle est obtenue par symétrie de la courbe représentative de la fonction ln par symétrie d'axe $y = x$.



VI.3. Puissances quelconques

VI.3.a) Définition

Définition
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction élévation à la puissance α, noté $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R}^{+} & \\ x & \mapsto & x^\alpha & = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)} \end{array}}$$

VI.3.b) Propriétés

Propriété immédiates

1. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)}$
2. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \beta \in \mathbb{R},\ x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta}$
3. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \beta \in \mathbb{R},\ x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}}$
4. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ y^{-\alpha} = \dfrac{1}{y^\alpha}}$
5. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha}$
6. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \beta \in \mathbb{R},\ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}}$
7. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}}$

Propriété de dérivée

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (x^\alpha)' = \alpha\ x^{\alpha-1}}$$

2. Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a : $\boxed{(u^\alpha)' = \alpha\ u^{\alpha-1} \times u'}$

Cette formule est valable sur tout ensemble E sur lequel :

× la fonction u est strictement positive *(pour que u^α soit définie)*,

× la fonction u est dérivable *(pour que u' soit définie)*.

Démonstration.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $f : x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ et $u(x) = \alpha \ln(x)$.
La fonction f est dérivable sur tout ensemble E sur lequel :

× u est dérivable.

Ainsi, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = u'(x)\ e^{u(x)} = \frac{\alpha}{x}\ e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha\ x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

2. Cette règle s'obtient en écrivant : $u^\alpha = e^{\alpha \ln(u)}$. □

Exercice
Ensemble de dérivabilité et calcul des dérivées des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ *b.* $g : x \mapsto (x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{3}}$

Remarque *Puissance entière ou puissance quelconque ?*

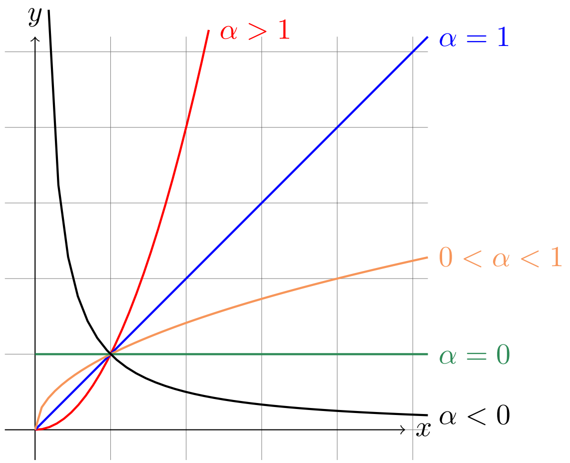
À $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, nous avons deux définitions pour la fonction $x \mapsto x^n$:

× la définition « classique » : la quantité x^n est le produit de n quantités x.
Avec cette définition, $x \mapsto x^n$ est alors définie sur $\mathbb{R}$.

× la définition « puissance quelconque » : la quantité x^n est définie à l'aide des fonctions exp et ln comme $x^n = e^{n \ln(x)}$.
Avec cette définition, $x \mapsto x^n$ est alors définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Il convient de remarquer que ces deux définitions coïncident sur $\mathbb{R}^{+*}$.

VI.3.c) Représentation graphique



Exercice *où l'on démontre que $-1 = 1$ ...*
Commenter la démonstration suivante.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

VI.4. BONUS : définition des fonctions racines $n^{\text{ème}}$

VI.4.a) Via le théorème de la bijection

Si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est :

× continue sur $[0, +\infty[$,

× strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection on a donc :

1) f est une bijection de l'ensemble $[0, +\infty[$ sur l'ensemble :

$f([0, +\infty[) = [f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [0, +\infty[$.

2) f admet une bijection réciproque, continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$: c'est la fonction **racine** $n^{\text{ème}}$.

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \sqrt[n]{\cdot} & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}}$$

De par cette définition, on a les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \ (y = x^n \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt[n]{y})}$

2) $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad (\sqrt[n]{y})^n = y}$ *3)* $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt[n]{(x^n)} = x}$

VI.4.b) Via les puissances quelconques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction racine $n^{\text{ème}}$ peut aussi être définie comme un opérateur puissance quelconque. Plus précisément :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \sqrt[n]{\cdot} & : & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \end{array}}$$

- Dans ce cas, la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est définie seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut la prolonger par continuité en 0 en posant : $(0)^{\frac{1}{n}} = 0$.
- Cette définition coïncide avec celle obtenue par le théorème de la bijection sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$.

Remarque
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la définition de $\sqrt[n]{\cdot}$ comme une fonction élévation à la puissance quelconque possède les deux avantages suivants.

- Les propriétés s'écrivent de manière naturelle :
  × $\forall y \in \mathbb{R}^+, \ (\sqrt[n]{y})^n \ = \ (y^{\frac{1}{n}})^n \ = \ y$
  × $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ (\sqrt[n]{x^n}) \ = \ (x^n)^{\frac{1}{n}} \ = \ x$
- On obtient les propriétés de dérivée :

1. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ (x^{\frac{1}{n}})' = \dfrac{1}{n} \ x^{\frac{1}{n}-1}}$

2. $\boxed{(\sqrt[n]{u})' = (u^{\frac{1}{n}})' = \dfrac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \times u'}$

Bijection réciproque de $x \mapsto x^3$

La fonction $f : x \mapsto x^3$ est :

× continue sur $\mathbb{R}$,

× strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Formellement, on peut donc définir sa bijection réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction $\sqrt[3]{\cdot}$ définie précédemment peut alors être vue comme restriction sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$ de la fonction f^{-1}.

☞ Par convention, on définit la fonction $\sqrt[3]{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ même si, par application du théorème de la bijection, on pourrait définir la réciproque de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

VII. Fonction partie entière

VII.1. Définition

Définition
On appelle fonction **partie entière** la fonction suivante.

$$\begin{array}{rccl} \lfloor\,.\,\rfloor & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & \lfloor x\rfloor = \text{le pus grand entier } n\in\mathbb{Z} \text{ tel que } n\leqslant x \end{array}$$

Remarque

- On peut aussi définir $\lfloor x\rfloor$ comme l'unique entier relatif vérifiant la propriété : $n \leqslant x < n+1$.
- De manière informelle, $\lfloor x\rfloor$ peut être défini comme étant « l'entier relatif directement plus petit que x ».
- De ce fait, on parle parfois de **partie entière par défaut**, ce qui permet aussi de marquer la différence avec la fonction **partie entière par excès**, notée $\lceil x\rceil$ et définie comme suit.

$$\begin{array}{rccl} \lceil\,.\,\rceil & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & \lceil x\rceil = \text{le pus petit entier } n\in\mathbb{Z} \text{ tel que } x\leqslant n \end{array}$$

- On peut aussi définir $\lceil x\rceil$ comme l'unique entier relatif vérifiant la propriété : $n-1 < x \leqslant n$.
- De manière informelle, $\lceil x\rceil$ peut être défini comme étant « l'entier relatif directement plus grand que x ».
- Il est immédiat que :

a. $\forall n\in\mathbb{Z},\ \lfloor n\rfloor = n$

b. $\forall n\in\mathbb{Z},\ \lceil n\rceil = n$

c. $\forall x\in\mathbb{R},\ \lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in\mathbb{Z} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

VII.2. Propriétés

Propriété fondamentale

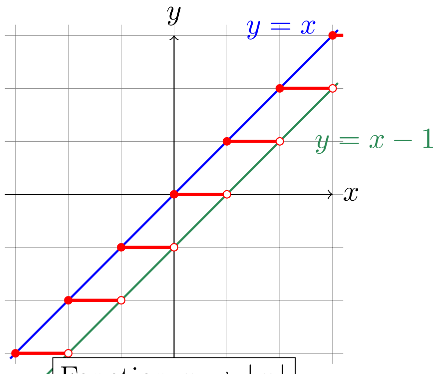
1) De par la définition : $\boxed{\forall u\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z},\ (\lfloor u\rfloor = n \quad\Leftrightarrow\quad n\leqslant u < n+1)}$

2) $\boxed{\forall u\in\mathbb{R},\ u-1<\lfloor u\rfloor\leqslant u}$ et $\boxed{\forall u\in\mathbb{R},\ u\leqslant\lceil u\rceil < u+1}$

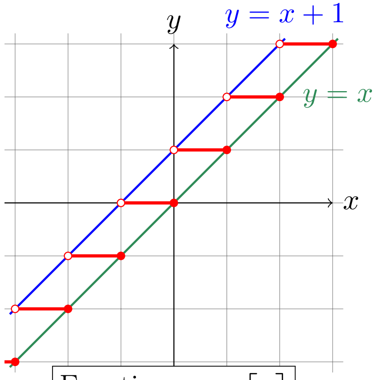
Propriété

- Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a :
  - × sur tout intervalle $[k, k+1[$, la fonction $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ est constante égale à k,
  - × sur tout intervalle $]k, k+1[$, la fonction $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ est continue.
- On a : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\lfloor x\rfloor = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\lfloor x\rfloor = +\infty}$
- Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a :
  - × sur tout intervalle $]k, k+1]$, la fonction $x\mapsto\lceil x\rceil$ est constante égale à $k+1$,
  - × sur tout intervalle $]k, k+1[$, la fonction $x\mapsto\lceil x\rceil$ est continue.
- On a : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\lceil x\rceil = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\lceil x\rceil = +\infty}$

VII.3. Représentation graphique



Fonction $x\mapsto\lfloor x\rfloor$



Fonction $x\mapsto\lceil x\rceil$

Exercice
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$. En déduire la valeur de $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor$.

Exercice
Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.
Quelle est cette fonction ?

Étude graphique d'une fonction contenant une partie entière

On considère ici une fonction $f : x \mapsto \lfloor g(x) \rfloor$ où $g(x)$ est une quantité dépendant de x. L'étude graphique de f peut se faire comme suit.

1. On commence par l'étude de g.
On déterminera notamment l'ensemble $\mathrm{Im}(g)$, image de la fonction g.

2. Pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, on a :
$$\lfloor g(x) \rfloor = k \quad \Leftrightarrow \quad k \leqslant g(x) < k+1$$
Pour $k \in \mathbb{Z} \cap \mathrm{Im}(g)$, on va donc chercher à déterminer l'ensemble des éléments x tels que : $\quad k \leqslant g(x) < k+1$.

3. D'après la propriété fondamentale, on a : $g(x) - 1 < \lfloor g(x) \rfloor \leqslant g(x)$.
En traçant les courbes des fonctions $x \mapsto g(x) - 1$ et $x \mapsto g(x)$ on repère graphiquement les intervalles où $\lfloor g(x) \rfloor = k$.

Exemple
Étude de la fonction $f : x \mapsto \lfloor (x-2)^2 \rfloor$.

1. La fonction $g : x \mapsto (x-2)^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ($\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^+$).

2. Soit $k \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+$ autrement dit $k \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}
\lfloor (x-2)^2 \rfloor = k \quad & \Leftrightarrow \quad k \leqslant (x-2)^2 < k+1 \\
& \Leftrightarrow \quad k \leqslant (x-2)^2 \quad \text{ET} \quad (x-2)^2 < k+1 \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{k} \leqslant \sqrt{(x-2)^2} \quad \text{ET} \quad \sqrt{(x-2)^2} < \sqrt{k+1} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{k} \leqslant |x-2| \quad \text{ET} \quad |x-2| < \sqrt{k+1} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{k} \leqslant |x-2| < \sqrt{k+1}
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

a) Si $x - 2 \geqslant 0$: on a alors $|x-2| = x-2$ et :
$$\begin{aligned}
\lfloor (x-2)^2 \rfloor = k \quad & \Leftrightarrow \quad \sqrt{k} \leqslant x-2 < \sqrt{k+1} \\
& \Leftrightarrow \quad 2+\sqrt{k} \leqslant x < 2+\sqrt{k+1} \\
& \Leftrightarrow \quad x \in [2+\sqrt{k}, \ 2+\sqrt{k+1}[
\end{aligned}$$

b) Si $x - 2 < 0$: on a alors $|x-2| = -x+2$ et :
$$\begin{aligned}
\lfloor (x-2)^2 \rfloor = k \quad & \Leftrightarrow \quad \sqrt{k} \leqslant -x+2 < \sqrt{k+1} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{k}-2 \leqslant -x < \sqrt{k+1}-2 \\
& \Leftrightarrow \quad 2-\sqrt{k+1} < x \leqslant 2-\sqrt{k} \\
& \Leftrightarrow \quad x \in]2-\sqrt{k+1}, \ 2-\sqrt{k}]
\end{aligned}$$

3. Représentation graphique.