Feuille d'exercices n°3 : Fonctions usuelles, règles de dérivation

Étude de fonctions

Exercice 1. ($\bigstar$)
Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$

b. $f : x \mapsto e^x \ln(2x+3)$

c. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2+1}$

d. $f : x \mapsto \ln(x^5+1)$

Exercice 2. ($\bigstar$) *Entraînement au calcul*
Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto 1 + \ln(1+x)$

b. $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+e^x} - x$

c. $f : x \mapsto x^{1/x}$

d. $f : x \mapsto \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$

e. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$

Exercice 3 ($\bigstar\bigstar$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a. Faire l'étude de la fonction f.

b. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre d'antécédents de y par f.

Exercice 4. ($\bigstar$) *Étude de fonctions ...*

a. $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

c. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

d. $f : x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$

e. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+e^x}$

f. $f : x \mapsto e^{1/\ln x}$

g. $f : x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$

h. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$

i. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

j. $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Logarithme

Exercice 5. ($\bigstar\bigstar$)
Montrer (dans cet ordre !) les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leqslant x$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$

Exercice 6 ($\bigstar$)

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

b. Faire l'étude graphique de la fonction suivante.

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x^2) \end{array}$$

Puissances

Exercice 7. ($\bigstar\bigstar$)
Proposer deux méthodes différentes pour définir la fonction racine cinquième. Que pouvez-vous dire des ensembles de définition des deux fonctions que vous venez de définir ?

Exercice 8. ($\bigstar$) *Où l'on démontre que $-1 = 1$ ...*
Commenter la démonstration suivante.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Inégalité triangulaire

Exercice 9. ($\bigstar\bigstar\bigstar$)

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y|^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2$.

b. À l'aide de ce résultat, démontrez l'inégalité triangulaire.

Exercice 10. ($\bigstar\bigstar\bigstar$)
On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
Montrer, dans cet ordre :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x+y| \leqslant |x| + |y|$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$

Partie entière

Exercice 11. ($\bigstar$)

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

b. En déduire la valeur de $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor$.

Exercice 12. ($\bigstar$)
Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.
Quelle est cette fonction ?

Valeur absolue

Exercice 13. ($\bigstar$) (valeur absolue)
Écrire sans valeur absolue les quantités suivantes.

a. $|x+1| + |x+2|$

b. $|x^2-1| - |x^2+1| + |2x^2 - x + 1|$

c. $\dfrac{|2x+7|+3}{7-|3x+2|}$

Exercice 14. ($\bigstar\bigstar$)
Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $|x+1| + |x+2| = 1$

b. $|x+1| + |2x+3| + |4x+5| = 7$

c. $|x^2 + x - 7| + |x| < 5$