Feuille d'exercices n°4 : Récurrence, sommes et produits

Récurrence

Exercice 1. (★)
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

Exercice 2. (★)
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

Exercice 3. (★)
Notons (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur sa valeur et démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 4. (★)
Soit (w_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}(w_n + 4n + 6) \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 5. (★)
Montrer par récurrence les propriétés suivantes.

a. $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$

b. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

c. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

Sommes finies : définition

Exercice 6. (☆)
Écrire à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes.

a. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \cdots + 3^{15}$

b. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024}$

c. $u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^n}{n}$

d. $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Sommes finies : manipulations d'indices

Exercice 7. (★)
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)\sqrt{n-k} \ = \ \sum\limits_{i=0}^{n-1} (n-i+1)\sqrt{i}$

Exercice 8. (★)

1. Soient a et b deux réels. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} \ = \ (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

2. Donner de même une factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9. ($\bigstar$)

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

2. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

Sommes usuelles

Exercice 10. ($\bigstar$)
Calculer les sommes suivantes.

a. $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} k$ ***d.*** $\displaystyle\sum_{i=5}^{11} (3+5i)$ ***g.*** $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$

b. $\displaystyle\sum_{k=9}^{125} k$ ***e.*** $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3}$ ***h.*** $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{3^k}{2^{2k}}$

c. $\displaystyle\sum_{i=5}^{11} x$ ***f.*** $\displaystyle\sum_{k=3}^{125} \frac{48}{2^k}$

Exercice 11. ($\bigstar$)
Calculer les sommes suivantes.

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$ ***d.*** $\displaystyle\sum_{k=823}^{2012} 7$ ***g.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (6k^2+4k+1)$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ ***e.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$ ***h.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{4^k}$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^{2k}$ ***f.*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^k+k^2+2)$ ***i.*** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$

Exercice 12. ($\bigstar\bigstar$)
Démontrer les résultats suivants.

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = 2n^4 - n^2$

c. $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{q}{(q-1)^2}\left(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1\right)$

Exercice 13. ($\bigstar\bigstar$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et notons (S_n) la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

Dans cet exercice, on considère n carrés emboîtés : le plus petit est de côté S_1, le suivant de côté S_2, …, le dernier est de côté S_n.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note C_i l'aire du carré de côté S_i.

a. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, exprimer $C_k - C_{k-1}$ en fonction de S_k et S_{k-1}.

b. En déduire une expression de $C_k - C_{k-1}$ en fonction de k.

c. Déduire de la question précédente que $C_n - C_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^3$.

d. Conclure sur la relation liant la somme des n premiers entiers et la somme des n premiers cubes.

Exercice 14. ($\bigstar\bigstar$)
Calculer les produits suivants.

a. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 3$ ***c.*** $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$ ***e.*** $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} q^{2^k}$

b. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$ ***d.*** $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} q^k$

Exercice 15. (☆)
Que vaut la somme des n permiers entiers pairs ? Impairs ?

Exercice 16. (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$.
On définit la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} k.q^k$.
On définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
Le but de cet exercice est de démontrer de manière directe le dernier point de l'exercice 12.

a. Calculer f_n', la dérivée de la fonction f_n par rapport à la variable x.
b. En déduire une relation entre u_n et $f_n'(q)$.
c. En reconnaissant une somme classique, simplifier l'expression de $f_n(x)$.
d. Calculer f_n' à l'aide du résultat de la question précédente.
e. En déduire le résultat souhaité.

Sommes doubles

Exercice 17. (★)
Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right)$$

Exercice 18. (★)
Soient $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)$$

Exercice 19. (★★) *(Sommation suivant les « diagonales »)*
Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{i+j=k} a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n-i+1} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} a_{i,j}\right)$$

Exercice 20. (★★★)
Calculer les sommes doubles suivantes.

a. $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}\right)$

b. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$

c. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$

d. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$

e. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$

f. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

Exercice 21. (★★★)
Calculer les sommes et produits suivants (avec $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$).

a. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$

b. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$

c. $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$

d. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a^{i+j}$

e. $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a^{i+j}$

f. $\sum_{k=0}^{n} \exp(kx)$

Exercice 22. (★★★)
Soit $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$