CH V : Généralités sur les suites réelles

I. Notion de suite

I.1. Définition générale

Définition
Une **suite** de nombre réels u est une **application** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ *i.e.* une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que tout élément $n \in \mathbb{N}$ possède une image par u.

$$\boxed{\begin{array}{rcccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & u(n) \end{array}}$$

Notation

- On utilisera la notation u_n pour représenter $u(n)$, l'image de l'application u au point n.
- Pour cet élément u_n, on préférera parler de valeur de la suite au rang n ou encore de **terme général de la suite**.
- Une telle application u sera généralement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n).

Remarque
On pourra aussi considérer des suites :

× définies seulement à partir du rang 1

$$\begin{array}{rcccc} u & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & \dfrac{1}{n} \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} v & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & \ln(n) \end{array}$$

× définies seulement à partir du rang 2 : $(\ln(n-1))_{n\geqslant 2}$

× définies seulement à partir du rang m (pour $m \in \mathbb{N}$) : $\left(\dfrac{1}{n-(m-1)}\right)_{n\geqslant m}$

I.2. Comment définir une suite ?

a) Par formule explicite

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n+3$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2.7^n$

b) Par formule récurrente

- $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & u_n + 5 \end{array}\right.$
  (cette suite est arithmétique, cf plus loin)
- $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & 7 \times u_n \end{array}\right.$
  (cette suite est géométrique, cf plus loin)
- $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\sqrt{2} \\ u_1 & = & 2\ln(3) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} & = & 7 \times u_{n+1} - 4u_n \end{array}\right.$
  (cette suite est dite récurrente linéaire d'ordre 2, cf plus loin)
- $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 8 \\ u_1 & = & 10 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} & = & 7\ln(u_{n+1}) + \frac{4}{u_n} + 1 \end{array}\right.$
  (cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique ...)

c) Par restriction sur $\mathbb{N}$ d'une fonction réelle

- $\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \times e^{-\sqrt{|x|}} \end{array}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n) = n \times e^{-\sqrt{|n|}}$

Évidemment, ce type de définition n'est possible que si la fonction f est définie sur un ensemble qui inclut $\mathbb{N}$.
On obtient ainsi une formule explicite pour la suite.

I.3. Propriétés - vocabulaire

I.3.a) Sens de variation

Une suite est croissante si elle définit une fonction croissante.

$$(u_n) \text{ croissante} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (m \leqslant n \Rightarrow u_m \leqslant u_n))$$

On utilise en fait la définition suivante qui tire partie des propriétés de $\mathbb{N}$.

Définition *(Sens de variation des suites)*

- Une suite (u_n) est dite **croissante** si : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \ \geqslant \ u_n}$
- Une suite (u_n) est dite **décroissante** si : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \ \leqslant \ u_n}$
- Dans le cas où ces inégalités sont strictes, on parlera de **croissance stricte** et de **décroissance stricte**.
- Une suite (u_n) est dite (strictement) **monotone** si elle est :
  × soit (strictement) **croissante**,
  × soit (strictement) **décroissante**.
- Une suite à la fois croissante et décroissante est **constante**.

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ constante} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = a \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = u_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n \end{aligned}$$

- Une suite est dite **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang. $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0})}$
- De manière générale, on dit qu'une propriété $\mathcal{P}(.)$ est vérifiée à partir d'un certain rang si : $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathcal{P}(n))}$

Exercice
Montrer que ces deux notions de croissance sont équivalentes.

Méthodologie
Pour montrer qu'une suite est croissante, il faut démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \ \geqslant \ u_n$$

Cherchons à simplifier cette inégalité. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) En déplaçant u_n de l'autre côté de l'inégalité :

$$u_{n+1} \ \geqslant \ u_n \ \Leftrightarrow \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

> **À retenir** : pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut étudier le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$.

2) En divisant par u_n :

a. Si $u_n > 0$: $\quad u_{n+1} \ \geqslant \ u_n \ \Leftrightarrow \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

b. Si $u_n < 0$: $\quad u_{n+1} \ \geqslant \ u_n \ \Leftrightarrow \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

Dans le cas des suites de signe constant, on peut donc étudier la monotonie de (u_n) en formant le quotient. Plus précisément :

> **À retenir** : pour étudier la monotonie d'une suite (u_n),
> - Si (u_n) est une suite strictement positive ($\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0$)
>
> $$(u_n) \text{ croissante} \ \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$
> $$(u_n) \text{ décroissante} \ \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$
>
> - Si (u_n) est une suite strictement négative ($\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n < 0$)
>
> $$(u_n) \text{ croissante} \ \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$
> $$(u_n) \text{ décroissante} \ \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

(pour monotonie stricte : remplacer inégalités larges par des strictes)

Exercice
Soit (u_n) une suite telle qu'il n'existe aucun rang à partir duquel elle est de signe constant. Montrer que (u_n) n'est pas monotone.

Remarque
La forme de u_n nous permet de décider quelle quantité considérer :
× si u_n est définie « à l'aide de sommes », on forme la quantité $u_{n+1} - u_n$.
× si u_n est définie « à l'aide de quotients », on forme la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple
Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

(elle est même strictement croissante puisque $\dfrac{1}{n+1} > 0$)

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n! > 0$ et $\sqrt{n} > 0$, on a : $v_n > 0$.
La suite (v_n) est strictement positive. Or :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}}{n!} = \frac{(n+1) \times (\cancel{n!})}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}}{\cancel{n!}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} \times \cancel{\sqrt{n+1}}}{\cancel{\sqrt{n+1}}} \times \sqrt{n} = \sqrt{n+1} \times \sqrt{n} > 1 \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est strictement croissante.

I.3.b) Bornes d'une suite réelle

Définition *(Notion de majorant, minorant)*

- Une suite (u_n) est dite **majorée** si elle admet un majorant.

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant M}$$

- Une suite (u_n) est dite **minorée** si elle admet un minorant.

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant m}$$

- Une suite à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée } \Leftrightarrow \ \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \ m \leqslant u_n \leqslant M}$$

Remarque
- Si une suite (u_n) admet un majorant M, tout réel $R \geqslant M$ est aussi majorant de la suite puisqu'on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant M \leqslant R$.
- Ainsi, si la suite (u_n) admet un majorant, elle en admet une infinité.
- Un majorant d'une suite (u_n) est un réel indépendant de la valeur de n.
  Par exemple, si on a (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant n^2$, **on ne peut pas** en conclure que (u_n) est majorée.
  (par exemple, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ n \leqslant n^2$ mais la suite (n) n'est pas majorée)

Exemple
Considérons la suite $\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$.

- Elle est majorée par 2 puisque : $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$.
- Elle est donc majorée par : $2, \ 2.1, \ e, \ 3, \ \dfrac{7}{2}, \ \sqrt{37} \ \ldots$
- Parmi ces majorants, il convient de distinguer « le meilleur » *i.e.* celui qui apporte le plus d'information sur la suite.
  Il s'agit ici de 2, le plus petit des majorants de la suite.

Définition *(Notion de borne supérieure, inférieure)*

- Toute suite réelle (u_n) majorée admet une **borne supérieure** :
  par définition, c'est le plus petit des majorants de la suite.

  On notera $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la borne supérieure de (u_n).
- Toute suite réelle (u_n) minorée admet une **borne inférieure** :
  par définition, c'est le plus grand des minorants de la suite.

  On notera $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la borne inférieure de (u_n).

Remarque

- Par définition, la borne supérieure de (u_n) (si elle existe !) est un majorant de (u_n). On est donc dans l'un des deux cas suivants :
  × soit (u_n) est majorée et, dans ce cas, elle admet une borne supérieure,
  × soit (u_n) n'est pas majorée et, dans ce cas, elle n'admet pas de borne supérieure.
- Il est à noter que la borne supérieure de (u_n) (si elle existe !) n'est pas forcément un élément de la suite.
- Par exemple, la suite (u_n) de terme générale $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ admet pour borne supérieure $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 2$. Et 2 n'est jamais atteint ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 2$).
- Si le « meilleur » des majorants est atteint, on parle de maximum.

Définition *(Notion de maximum, minimum)*

- On dira qu'une suite (u_n) admet un **maximum** atteint au rang n_0 si :

$$\boxed{\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n_0}}$$

  Un maximum atteint au rang n_0 sera noté : $u_{n_0} = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- On dira qu'une suite (u_n) admet un **minimum** atteint au rang n_0 si :

$$\boxed{\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n_0}}$$

  Un maximum atteint au rang n_0 sera noté : $u_{n_0} = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Remarque

Les notions de maximum et de borne supérieure sont différentes.

1) Si une suite admet un maximum, alors elle admet aussi une borne supérieure qui est égale à ce maximum.

2) Ainsi, si une suite n'admet pas de borne supérieure, elle n'admet pas non plus de maximum. *(c'est la contraposée du point précédent)*

3) Une suite peut admettre une borne supérieure mais pas de maximum. Autrement dit, la borne supérieure d'une suite n'est pas forcément atteinte (*i.e.* n'est pas forcément un élément de la suite).
(considérer par exemple la suite $(2 - \frac{1}{n})$*)*

Exercice

a) La suite $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est-elle majorée ? Minorée ?
Admet-elle une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

b) Répondre aux mêmes questions dans le cas de la suite $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

Propriété *(Caractérisation des suites bornées)*

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \ \leqslant\ M}$$

Autrement dit : (u_n) est bornée `ssi` la suite $(|u_n|)$ possède un majorant.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Si (u_n) est bornée, il existe m_1 et M_1 tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m_1 \leqslant u_n \leqslant M_1$.
Notons $M = \max\ (|m_1|, |M_1|)$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

($\Leftarrow$) Il suffit de remarquer que (propriété de la fonction valeur absolue) :

$$|u_n| \ \leqslant\ M \ \Leftrightarrow\ -M \ \leqslant\ u_n \ \leqslant\ M$$

□

I.3.c) Suites extraites

Définition

Soit (u_n) est une suite.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

- La suite $(u_{\varphi(n)})$ est une **sous-suite** (ou **suite extraite**) de (u_n).

Exemple

Considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

- Si on note $v_n = u_{2n}$, alors (v_n) est une suite extraite de (u_n) définie par :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{(-1)^{2n}}{(2n)+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.
- Si on note $w_n = u_{2n+1}$, alors (v_n) est une suite extraite de (u_n) définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1} = \dfrac{-1}{2n+2}$.
- La suite $(u_{n-3})_{n\geqslant 3}$ est aussi une suite extraite de (u_n).
- La suite $(u_{\ln(n)})_{n\geqslant 1}$ n'est pas une suite extraite de (u_n).

Exercice

On considère la suite (S_n) de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (S_n).

Il suffit de remarquer que $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\psi : n \mapsto 2n+1$ sont des fonctions :

× de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,

× strictement croissantes.

b. Déterminer le sens de variation des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Notons (v_n) la suite de terme général $v_n = S_{2n}$.
Alors : $v_{n+1} - v_n = S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \dots$
(on agit de même pour (S_{2n+1}) …)

II. Suites usuelles

II.1. Suites arithmétiques

Définition

- Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$$

- Dans ce cas, le réel r est appelé **raison** de la suite.

Théorème 1. *(Caractérisation des suites arithmétiques)*

$$\boxed{(u_n) \text{ arithmétique} \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n \times r}$$

Exemple

La suite (u_n) suivante est arithmétique.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

Elle a pour formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n + 3$.

Propriété *(D'autres caractérisations)*

1. $\boxed{(u_n) \text{ arithmétique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}}$

2. $\boxed{(u_n) \text{ arithmétique} \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)r}$

Démonstration.
La caractérisation 2 est relativement immédiate.
La caractérisation 1 se démontre en formant la différence $u_n - u_{n-1}$. □

II.2. Suites géométriques

Définition

- Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un réel q tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n}$$

- Dans ce cas, le réel q est appelé **raison** de la suite.

Théorème 2. *(Caractérisation)*

$$\boxed{(u_n) \text{ géométrique} \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n}$$

Exemple

La suite (u_n) suivante est arithmétique.

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5 \times u_n \end{array}\right.$$

Elle a pour formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 5^n$.

Propriété *(D'autres caractérisations)*

1. $\boxed{(u_n) \text{ géométrique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ {u_n}^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}}$

2. $\boxed{(u_n) \text{ géométrique} \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p \times q^{(n-p)}}$

Démonstration.
La caractérisation 2 est relativement immédiate.
La caractérisation 1 peut se faire par analogie avec la preuve dans le cas arithmétique : on forme $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ (pour $u_{n-1} \neq 0$!).
(que dire d'une suite géométrique (u_n) qui admet un rang n_0 tq $u_{n_0} = 0$?) □

Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique / géométrique

1) Soit (u_n) suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (u_0 + k \times r) = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r \sum_{k=0}^{n} k \\ &= (n+1)\ u_0 + r\ \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\ \left(u_0 + \frac{n}{2}\ r\right) \end{aligned}$$

2) Soit (u_n) suite géométrique de raison $q \neq 1$.

- Si $q \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} q^k \times u_0 = u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On rappelle que si $m \in [\![0, n]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q}$

Ce qu'on peut montrer aussi en écrivant la somme en extension :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} q^k &= q^m + q^{m+1} + \ldots + q^n = q^m(1 + q + \ldots + q^{n-m}) \\ &= q^m \left(\sum_{k=0}^{n-m} q^k\right) = q^m\ \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} = \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

3) Si $q = 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 1^k \times u_0 = \sum_{k=0}^{n} u_0 = (n+1) \times u_0$$

Exercice *(somme d'une suite arithmétique)*
Soit (u_n) une suite arithmétique.

a. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$.

c. Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ à l'aide de cette formule.

Exercice

a. Que peut-on dire du sens de variation d'une suite arithmétique ?
Soit (u_n) suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_{n+1} - u_n \; = \; r$$

La suite (u_n) est croissante si $r \geqslant 0$, décroissante sinon.

b. Que peut-on dire du sens de variation d'une suite géométrique ?
Soit (u_n) suite géométrique de raison q.

- Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$, la suite est constante nulle.
  Elle est donc à la fois croissante et décroissante.
- On suppose maintenant $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$.
  On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ (récurrence immédiate).

  1) Traitons le cas $u_0 > 0$.

  × si $q > 0$, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \; = \; q$$

  La suite (u_n) est croissante si $q \geqslant 1$, décroissante sinon.

  × si $q < 0$, la suite change de signe d'un rang à l'autre.
  La suite (u_n) n'est donc ni croissante ni décroissante.

  2) Le cas $u_0 < 0$ est similaire.
  Il faut cependant faire attention.
  En effet, si la suite (u_n) est négative on a :

  $$u_{n+1} \; \geqslant \; u_n \; \Leftrightarrow \; \frac{u_{n+1}}{u_n} \; \leqslant \; 1$$

  × si $q > 0$, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$.
  La suite (u_n) est croissante si $q \leqslant 1$, décroissante sinon.

  × si $q < 0$, la suite change de signe d'un rang à l'autre.
  La suite (u_n) n'est donc ni croissante ni décroissante.

Et si on prenait un peu de recul ?

Les suites arithmétiques et géométriques ont des constructions similaires : partant d'un élément u_0 on itére n fois une opération scalaire pour obtenir la valeur de u_n. Cette opération est :

× l'ajout de la raison dans le cas d'une suite arithmétique,

× la multiplication par la raison dans le cas d'une suite géométrique.

On peut obtenir les caractérisations précédentes (et démonstrations) des suites géométriques par traduction des propriétés des suites arithmétiques suivant le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} + & \longleftrightarrow & \times \\ - & \longleftrightarrow & / \\ n.r & \longleftrightarrow & q^n \\ 2u_n \; = \; u_{n+1} + u_{n-1} & \longleftrightarrow & u_n^2 \; = \; u_{n+1} \times u_{n-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{suites arithmétiques} \quad \longleftrightarrow \quad \text{suites géométriques}}$$

Exercice

Soient (u_n) une suite arithmétique et (v_n) une suite géométrique dont tous les termes sont strictement positifs.

a. Que peut-on dire de la suite (v_n) de terme général $v_n = e^{u_n}$?

Notons r la raison de (u_n).
On a alors : $v_{n+1} \; = \; e^{u_{n+1}} \; = \; e^{u_n + r} \; = \; e^r \times e^{u_n} \; = \; e^r \times v_n$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison e^r.

b. Que peut-on dire de la suite (u_n) de terme général $v_n = \ln(u_n)$?

Notons q la raison de (u_n). On traite le cas où $u_0 > 0$ et $q > 0$ (pour assurer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
On a alors : $v_{n+1} \; = \; \ln(u_{n+1}) \; = \; \ln(q \times u_n) \; = \; \ln(q) + \ln(u_n) \; = \; v_n + \ln(q)$
La suite (v_n) est donc arithmétique de raison $\ln(q)$.

II.3. Suites arithmético-géométriques

II.3.a) Définition

Définition

- Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et un réel $b \neq 0$ tel que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b}$
- On appelle **équation de point fixe** associée à la suite (u_n) l'équation (en la variable x) suivante : $\boxed{x = a \times x + b}$

  (si on note $f : x \mapsto a.x + b$, cette équation se réécrit : $f(x) = x$, faisant ainsi de l'élément $x \in \mathbb{R}$ un **point fixe** *de f)*

II.3.b) Méthode d'étude

Considérons une suite arithmético-géométrique (u_n).
On va ramener l'étude de ce type de suites à l'étude des suites géométriques.

1) *Résolution de l'équation de point fixe $x = a \times x + b$*

Cette équation admet pour unique solution $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$.

2) *Utilisation d'une suite auxiliaire (v_n) (géométrique)*

$$\begin{array}{lrcccccl} \text{On écrit :} & u_{n+1} & = & a & \times & u_n & + b & (L_1) \\ & \lambda & = & a & \times & \lambda & + b & (L_2) \\ & & & & & & & \\ \text{et donc} & u_{n+1} - \lambda & = & a & \times & (u_n - \lambda) & & (L_1) - (L_2) \end{array}$$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.
De par l'égalité précédente, on a : $v_{n+1} = a \times v_n$.

3) *Obtention de la formule explicite pour (v_n)*

La suite (v_n) est géométrique de raison a. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a^n \times v_0$.

4) *Conclusion : obtention de la formule explicite pour (u_n)*

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - \lambda \ = \ a^n \times (u_0 - \lambda)$
On obtient donc une formule explicite pour (u_n).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ a^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda}$$

Remarque

- Le principe de la démonstration est de faire apparaître u_n comme somme d'une partie géométrique (v_n) et d'un élément (λ) : $u_n = v_n + \lambda$.
- Les suites arithmético-géométriques apparaissent ainsi comme des suites géométriques translatées de λ.
- On note que la partie géométrique dans la définition de (u_n) ($u_{n+1} = a \times u_n + \ldots$) se retrouve dans la formule explicite ($u_n = a^n \times (u_0 - \lambda) + \ldots$).

Exercice

Notons (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 \times u_n + 2$.
Donner une formule explicite de (u_n) puis calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1) L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est : $x = 3 \times x + 2$.
Or : $x = 3 \times x + 2 \ \Leftrightarrow \ 2 \times x = -2$
Cette équation a donc pour unique solution : $\lambda = -1$.

2)
$$\begin{array}{lrcccccl} \text{On écrit :} & u_{n+1} & = & 3 & \times & u_n & + 2 & (L_1) \\ & \lambda & = & 3 & \times & \lambda & + 2 & (L_2) \\ & & & & & & & \\ \text{et donc} & u_{n+1} - \lambda & = & 3 & \times & (u_n - \lambda) & & (L_1) - (L_2) \end{array}$$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

3) La suite (v_n) est géométrique de raison 3.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3^n \times v_0 = 3^n\ (u_0 - \lambda) = 3^n\ (0 - (-1)) = 3^n$.

4) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \ = \ v_n + \lambda \ = \ 3^n - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Enfin,} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \ &= \ \sum_{k=0}^{n} (3^k - 1) \ = \ \sum_{k=0}^{n} 3^k - \sum_{k=0}^{n} 1 \ = \ \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - (n+1) \\ &= \ 2\ (3^{n+1} - 1) - n - 1 \ = \ 2 \times 3^{n+1} - n - 3 \end{aligned}$$

II.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

II.4.a) Définition

Définition

- Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels (non nuls) a et b tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \ = \ a \times u_{n+1} + b \times u_n}$$

- On appelle **équation caractéristique** associée à la suite (u_n) l'équation (en la variable x) $x^2 = ax + b$. On peut la réécrire :

$$\boxed{x^2 - ax - b = 0}$$

II.4.b) Méthode d'étude

Cette méthode est basée sur le calcul des racines de l'équation caractéristique. On a ainsi trois cas différents, en fonction du discriminant Δ du polynôme caractéristique.

Théorème 3.
Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Il existe donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1) *Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$*

Alors le polynôme admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
La formule explicite de (u_n) est donnée par :

$$\boxed{u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n}$$

où les réels λ et μ sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & u_0 \\ \lambda \times r_1 & + & \mu \times r_2 & = & u_1 \end{array}\right.$$

2) *Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$*

Alors le polynôme admet une racine double r.
La formule explicite de (u_n) est donnée par :

$$\boxed{u_n = \lambda \times r^n + \mu \times n \times r^n}$$

où les réels λ et μ sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & u_0 \\ \lambda r & + & \mu \times r & = & u_1 \end{array}\right.$$

3) *Si $\Delta = a^2 + 4b < 0$*

Alors le polynôme n'admet pas de racine réelle.
Une formule explicite pour la suite (u_n) <u>existe bien</u> mais ne sera pas donnée ici (Hors Programme).

Démonstration.
Hors programme et donc non développée ici. □

Exercice *(suite de Fibonacci)*
On considère la suite donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \ = \ 0 \\ u_1 \ = \ 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \ = \ u_{n+1} + u_n \end{array}\right.$$

Donner une formule explicite de cette suite.

- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est : $x^2 = x + 1$.
  Notons P le polynôme : $P(X) = X^2 - X - 1$.
  Son discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4\,(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.
  Ce polynôme admet donc deux racines disctinctes :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- On en déduit la formule explicite de (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times {r_1}^n + \mu \times {r_2}^n$ où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rclclr} 0 & = & \lambda & + & \mu & \textit{(valeur en } n=0\textit{)} \\ 1 & = & \lambda \times r_1 & + & \mu \times r_2 & \textit{(valeur en } n=1\textit{)} \end{array}\right.$$

Résolvons-le.

$$(S)\ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclcr} -1 & = & & (r_1 - r_2)\ \mu & {\scriptstyle r_1 \times (L_1) - (L_2)} \\ -1 & = & (r_2 - r_1)\ \lambda & & {\scriptstyle r_2 \times (L_1) - (L_2)} \end{array}\right.$$

Notons enfin que : $r_2 - r_1 \ = \ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \ = \ \sqrt{5}$.
On en déduit que : $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

Remarque

- Dans cette résolution, on a conservé r_1 et r_2 dans le système (S).
  Ce choix a été fait uniquement pour alléger les calculs qui suivent.
- Généralement, on utilise directement les valeurs de r_1 et r_2 pour écrire et résoudre le système (S).

III. Retour sur le principe de récurrence

III.1. Récurrence double

III.1.a) Pour quels types d'énoncés

Ce principe de récurrence est adapté lorsque, pour démontrer une propriété à un certain rang, il est nécessaire de savoir que cette propriété est vérifiée **aux deux rangs précédents**. Il est donc classique d'opérer par récurrence double pour prouver des propriétés sur des suites (u_n) qui sont définies sous la forme :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} u_0, u_1 \text{ donnés} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n) \end{array}\right.}$$

où f est une fonction à deux variables.

III.1.b) Aspect théorique

Théorème 4.
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. <u>Initialisation</u> *:* $\mathcal{P}(0)$ *et* $\mathcal{P}(1)$ *sont vraies*

2. <u>Hérédité</u> *:* $\forall n \geqslant 0,\ (\mathcal{P}(n) \texttt{ ET } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel.
Autrement dit : $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ \mathcal{P}(n)}$

Exercice
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1, \quad u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{array}\right.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et tel que $u_n > 0$.

III.1.c) Modèle de rédaction : illustration sur un exemple

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.
(ou par la méthode d'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Démonstration.
Montrons par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

1. **Initialisation**

- D'une part, $8 \times 2^0 - 7 \times 3^0 = 8 - 7 = 1$ et d'autre part $u_0 = 1$.
  Donc $\mathcal{P}(0)$.
- D'une part, $8 \times 2^1 - 7 \times 3^1 = 8 \times 2 - 7 \times 3 = 16 - 21 = -5$ et d'autre part $u_1 = -5$.
  Donc $\mathcal{P}(1)$.

2. **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiées.
Démontrons $\mathcal{P}(n+2)$. (*i.e.* $u_{n+2} = 8 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+2}$)
Par définition de la suite (u_n), on a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(8 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^{n+1}) - 6(8 \times 2^n - 7 \times 3^n) \quad \textit{(par H.R.)} \\ &= 8 \times 2^n(5 \times 2 - 6) - 7 \times 3^n(5 \times 3 - 6) \\ &= 8 \times 2^n \times 4 - 7 \times 3^n \times 9 \ = \ 8 \times 2^{n+2} - 7 \times 3^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(n)$. □

III.2. Récurrences fortes

III.2.a) Pour quels types d'énoncé

Ce principe de récurrence est adapté lorsque, pour démontrer une propriété à un certain rang, il est nécessaire de savoir que cette propriété est vérifiée **à tous les rangs précédents**. Il est donc classique d'opérer par récurrence forte pour prouver des propriétés sur des suites (u_n) qui sont définies sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) \end{cases}}$$

où f_n est une fonction à $n+1$ variables.

III.2.b) Aspect théorique

Théorème 5.
Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ *est vraie*

2. Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(0) \texttt{ ET } \mathcal{P}(1) \texttt{ ET } \mathcal{P}(2) \texttt{ ET } \ldots \texttt{ ET } \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant 0$.
Autrement dit : $\boxed{\forall n \geqslant 0, \ \mathcal{P}(n)}$

Exemple

1) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1} \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \geqslant 2, u_n = n + 1$.

2) On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v_k \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \geqslant 2, v_n = (n+1)!$
On pourra se servir du fait que : $(k+1) = ((k+2)-1)$

3) On considère la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_0 + w_1 + \cdots + w_n \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \leqslant 2^n$.

Remarque
Ces exemples sont assez artificiels.
On peut en effet les traiter par récurrence simple en remarquant que :

1) $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) u_n$,

2) $v_{n+1} = (n+2) v_n$,

3) $w_{n+1} = 2 w_n$.

III.2.c) Modèle de rédaction : illustration sur un exemple

Exercice
Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ est multiple d'un nombre premier.

Démonstration.
Montrons par récurrence forte que : $\forall n \geqslant 2, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: n est multiple d'un nombre premier.

1. **Initialisation**
2 est multiple d'un nombre premier : lui-même.
Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.

2. **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons que la propriété est vérifiée jusqu'au rang n
(autrement dit, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ et ... et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies).
Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $n+1$ est multiple d'un nombre premier)

Deux cas se présentent.

- Si $n+1$ est premier :
  Alors $n+1$ est multiple de lui-même.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée dans ce cas.
- Si $n+1$ n'est pas premier :
  Alors, par définition, $n+1$ admet un diviseur d autre que 1 et lui-même.
  Ce diviseur est dans l'ensemble $[\![2, n]\!]$.
  Or, par hypothèse**S** de récurrence (c'est $\mathcal{P}(d)$ qui nous sert ici), on sait que : d est multiple d'un nombre premier p.
  Par suite, $n+1$ est multiple de p.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée dans ce cas.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$. □