Feuille d'exercices n°5 : Récurrences doubles, suites réelles

Récurrence

Exercice 1. (★)
Montrer que $\forall n \geqslant n_0,\ 2^n > n^2$ (l'entier $n_0 \in \mathbb{N}$ est à déterminer).

Récurrence double

Exercice 2. (★)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n on a : $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

Exercice 3. (★)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Récurrence forte

Exercice 4. (★★★)
Démontrer que tout entier naturel $n \geqslant 2$ admet un diviseur premier.

Propriétés des suites

Exercice 5. (★)
On considère une suite (u_n) vérifiant la propriété :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant M$$

a. Donner la négation de cette propriété.

b. Montrer que la suite (u_n) est majorée. On exhibera l'un de ses majorants.

Exercice 6. (★)

a. La suite $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est-elle majorée ? Minorée ?
Admet-elle une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

b. Répondre aux mêmes questions dans le cas de la suite $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

Exercice 7. (★)
Soit $q > 0$.

a. Étudier le sens de variation de la suite : $\left(\dfrac{q^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

b. A-t-elle un minimum, un maximum, des bornes inférieure et supérieure ?

Exercice 8. (☆) *(Sens de variation)*
Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ***b.*** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$

Exercice 9. (★) *(Suites extraites)*
On considère la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (S_n).

b. Déterminer le sens de variation des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Suites classiques

Exercice 10. (★)
Pour chacune des suites suivantes, définies par récurrence, donner une expression explicite de u_n.

a. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6$.

b. $u_0 = 1\,;\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

c. $u_0 = 1\,;\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

d. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$.

e. $u_0 = 2\,;\ u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

Exercice 11. (★) *(Somme d'une suite arithmétique)*
Soit (u_n) une suite arithmétique.

a. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$.

c. Retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$ à l'aide de cette formule.

Exercice 12. (★)
Déterminer les suites bornées vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Exercice 13. (★★)
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \end{cases}$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

Exercice 14. (★)
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

Exercice 15. (★)
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.

b. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$.
Justifier que (v_n) est bien définie.

c. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

d. En déduire la formule explicite de u_n.

Exercice 16. (★)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie.

b. Calculer v_n et déduire la valeur de u_n.

Exercice 17. (★★)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$

a. Vérifier que cette suite est bien définie.

b. Donner une expression explicite de u_n. Comme dans les exercices précédents, on pourra introduire une suite auxiliaire (v_n) bien choisie.

Exercice 18. (★★) *(Des suites récurrentes croisées)*

Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

a. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que la suite (t_n) est constante.

c. Exprimer w_n en fonction de n.

d. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

e. Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3 à l'aide de la relation de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 19. (★)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \end{cases}$

On introduit la suite auxiliaire (t_n) de terme général :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

a. Montrer que (t_n) est une suite géométrique.

b. En déduire une expression de t_n puis de u_n.

Exercice 20. (★★)

Quatre réels a, b, c et q vérifient :

(i) Les nombres a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.

(ii) Les nombres a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q.

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

Exercice 21. (★★)

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.

b. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est d'un type bien connu, en déduire la valeur de z_n et celle de u_n.

Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 22. (★★★)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{2 + u_n} \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Suites définies à l'aide du symbole $\prod$

Exercice 23. (★★)
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1} \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ u_k = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \times u_{k-1}$.

b. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n = u_1 \times \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

En déduire la formule explicite de la suite (u_n).

c. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2, u_n = n + 1$.

Cette question devra être traitée sans se servir des résultats précédents.

Exercice 24. (★★)
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)u_k \end{cases}$$

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

b. Démontrer que : $\forall k \geqslant 2,\ u_k = (1+k)u_{k-1}$.

c. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)$.

En déduire la formule explicite de la suite (u_n).

d. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n = (n+1)!$

Cette question devra être traitée sans se servir des résultats précédents.
On pourra se servir du fait que : $(k+1) = ((k+2) - 1)$