Feuille d'exercices n°6 : Convergence des suites réelles

Définition de la convergence

Exercice 1. (★★★) *Quelques démonstrations du cours ...*

a. On suppose que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.
Montrer (avec les ε) que $u_n v_n$ tend vers 0.

b. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ'.
Montrer que $(u_n - \ell)(v_n - \ell')$ tend vers 0 et en déduire la limite de $u_n v_n$.

c. On suppose $u_n > 0$ (à partir d'un certain rang) et $u_n \to 0$.
Montrer que $1/u_n \to +\infty$.

d. On suppose que $u_n \to +\infty$. Montrer que $1/u_n \to 0$.

Exercice 2. (★)
Soit (u_n) une suite convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
On se propose de montrer que $\mathrm{e}^{un} \to \mathrm{e}^{\ell}$.

a. Soit $A > 0$. Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, on a : $-A \leqslant u_n - \ell \leqslant A$.

b. En déduire qu'à partir d'un certain rang, on a :

$$-\mathrm{e}^A + 1 \leqslant \mathrm{e}^{u_n - \ell} - 1 \leqslant \mathrm{e}^A - 1$$

c. En déduire que la suite $(1 - \mathrm{e}^{u_n - \ell})$ tend vers 0.

d. Conclure.

Exercice 3. (★★) *Vrai ou Faux ?*

a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.

b. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

c. Si $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge.

d. Si $(|u_n|)$ tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.

e. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.

f. Une suite convergente et majorée est croissante.

g. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

h. Si (u_n) est croissante et $u_n \leqslant v_n$ alors (v_n) est croissante.

i. Si (u_n) est divergente, alors la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$ est divergente.

j. Si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Exercice 4. (★★★)
Soit (u_n) une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ℓ. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Calculs de limites

Exercice 5. (★★)

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 - 5n\sqrt{n} + n - \ln n + n^{-1}}{\mathrm{e}^{3n} - \mathrm{e}^n + 1 - \mathrm{e}^{-n}}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2} - n$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-3)\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+n^2\right)^{1/n}$

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^2 + 3n + 1}{\ln n + 5}$

g. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{n!}$

h. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

Théorème de convergence monotone / d'encadrement

Exercice 6. (★)

Soit la suite définie par $u_n = \dfrac{5^n}{n!}$ pour tout $n \geqslant 0$.

a. Calculer les cinq premiers termes. La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 4$.

c. Montrer que pour $n \geqslant 5$, $\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{6}\, u_n$.

d. Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_5 = u_5$ et de raison $\dfrac{5}{6}$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 5$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

e. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 7. (★★)

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b. En déduire la limite de la suite (S_n).

c. On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (T_n) converge.

d. Exhiber alors une suite (u_n) tel que : $\dfrac{S_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 8. (★)

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. Démontrer que la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ converge vers un réel $\ell \in]2, 3]$.

Exercice 9. (★★) *D'après* `EDHEC 2001`

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

a. Montrer que la suite est bien définie et à termes strictement positifs.

b. En déduire que (u_n) est monotone.

c. Pour tout k de $\mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2 - {u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.

d. En déduire que pour tout $n > 0$, on a :

$${u_n}^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{u_k}^2}$$

e. En déduire que pour n non nul, ${u_n}^2 \geqslant 2n + 1$ puis la limite de (u_n).

Exercice 10. (★)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Calculer sa limite.

Exercice 11. (★★)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un rang n_0 à partir duquel : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

a. Montrer que si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.

b. Montrer que si $v_n \to 0$ alors $u_n \to 0$.

Suites implicites

Exercice 12. (★★)
On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \left]0,1\right[$.
On s'intéresse maintenant à la suite (x_n).

b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0,\ x_n < x_{n+1}$.

c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.

d. Démontrer que : $\forall n > 0,\ x_n \leqslant \ell$.

e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 13. (★★)
On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \exp(u_n) - 1 \end{array}\right.$

On note f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0.
Déterminer le signe de $f(x) - x$. Préciser le sens de variations de f.

On suppose maintenant que $u_0 = 1$.

b. Montrer que pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

c. Montrer que (u_n) n'est pas majorée et en déduire sa limite.

d. Monter que si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant (\mathrm{e} - 1)x$.

e. En déduire que pour tout entier n, $u_n \geqslant (\mathrm{e} - 1)^n$ et retrouver la limite de la suite.

On suppose maintenant que $u_0 < 0$.

f. Montrer que pour tout entier n, $u_n < 0$.

g. En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge vers 0.

Suites adjacentes

Exercice 14. (★)
On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
En déduire que la suite (S_n) converge.

Exercice 15. (★)
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 16. (★)
Soient (u_n) et (v_n) définies par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} u_0 & = & 3 & \text{et} & v_0 & = & 11 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + v_n}{4} & \text{et} & v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{array}\right.$$

a. Étudier la suite $(v_n - u_n)$. Calculer son terme général en fonction de n, quel est son signe ? Donner sa limite.

b. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

c. Étudier la suite $(u_n + v_n)$. Que conclure ?