CH VII : Ensembles et applications

I. Ensembles

I.1. Notion intuitive d'ensemble

Définition

- On utilisera la définition intuitive d'**ensemble**, à savoir qu'un ensemble est une réunion d'objets.
- Les objets appartenant à un ensemble sont appelés ses **éléments**.
  On utilise la notation :
  × $x \in E$: pour indiquer que x est un élément de l'ensemble E.
  × $x \notin E$: pour indiquer que x n'est pas un élément de E.
- L'ensemble ne comportant aucun élément est appelé **ensemble vide**.
  Il est noté $\varnothing$.
- Deux ensembles sont dits **égaux** s'ils ont les mêmes éléments.

Remarque
Nous n'avons pas défini rigoureusement la notion d'ensemble. On se contente de dire qu'un ensemble est bien défini dès que l'on connaît tous ses éléments.

Exemple

- On appelle **intervalle réel** tout ensemble de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$, $]a, b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.
  On rappelle que $[a, b[$ désigne l'ensemble contenant tous les réels contenus entre a (inclus) et b (exclu).
- On appelle **intervalle entier** et on note $[\![m, n]\!]$ l'ensemble contenant tous les entiers de l'intervalle $[m, n]$, où m et n sont des entiers tels que $m < n$.
  En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
  $$[\![1, n]\!] = \underbrace{\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}}_{\text{sous forme compréhensive}} = \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{\text{sous forme extensive}}$$

Vocabulaire

- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est appelé un singleton.
  × $\{1\}$ est le singleton dont le seul élément est 1.
  × $\{\{1\}\}$ est le singleton dont le seul élément est l'ensemble $\{1\}$.
  × $\{\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}\}$ est le singleton dont l'unique élément est l'ensemble $\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}$ (cet ensemble contient lui-même trois éléments : les ensembles $\varnothing$, $\{1\}$ et $\{1, 2\}$).
- De manière générale, un ensemble E contenant un **nombre fini** d'éléments est appelé **ensemble fini**.
  Ce nombre est appelé **cardinal** de E et noté $\text{Card}(E)$.
  $$\text{Card}(\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}) = 3 \quad \text{et} \quad \text{Card}(\{\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}\}) = 1$$
  (on donnera une définition plus rigoureuse de la notion de cardinal dans le chapitre suivant)

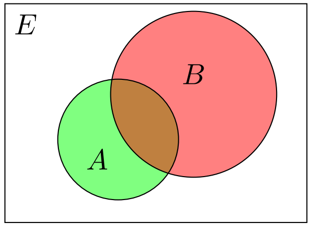
I.2. Comparaison d'ensembles : l'inclusion

I.2.a) Définition

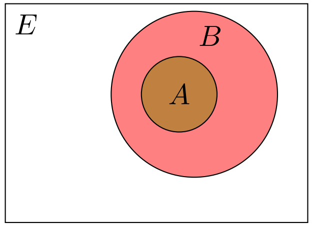
Définition
Soit A et E deux ensembles.

- On dit que A est **inclus** dans E, et on notera $A \subset E$ ou $A \subseteq E$, si tout élément de A est un élément de E.
  $$\boxed{A \subset E \ \Leftrightarrow\ \forall x \in A,\ x \in E}$$
- Lorsque $A \subset E$, on dit que A est un sous-ensemble de E ou encore une partie de E.

Représentation graphique.
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.



$A \nsubseteq B$



$A \subseteq B$

Remarque

- Le plus petit (en terme d'inclusion) sous-ensemble de E est l'ensemble vide.
- Le plus grand (en terme d'inclusion) est E lui-même.

I.2.b) Modèle de rédaction pour démontrer $A \subset B$

`Soit` $x \in A$.   ...*démonstration* ...   `Alors` $x \in B$. `On a donc démontré` $A \subset B$.

I.2.c) Propriétés de l'inclusion

Propriété

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1) $\varnothing \subset A$

2) $A \subset A$ *(réflexivité)*

3) $(A \subset B \texttt{ ET } B \subset A) \Rightarrow A = B$ *(antisymétrie)*

4) $(A \subset B \texttt{ ET } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ *(transitivité)*

Démonstration.

1) Tout élément de $\varnothing$ (il n'y en a aucun !) est élément de A.

2) Soit $x \in A$ alors $x \in A$.

3) Supposons que $A \subset B$ ET $B \subset A$ et montrons $A = B$ *i.e.* que A et B ont mêmes éléments.

- Comme $A \subset B$, tout élément x de A, est aussi élément de B.
- De même, comme $B \subset A$, si $x \in B$ alors $x \in A$.

Tout élément de A est élément de B et inversement.
On en déduit que $A = B$.

4) Supposons que $A \subset B$ ET $B \subset C$ et démontrons que $A \subset C$.

Soit $x \in A$. Montrons que $x \in C$.

Comme $x \in A$ et $A \subset B$, on en déduit que $x \in B$.
Or $B \subset C$. Comme $x \in B$, on en déduit que $x \in C$.

□

Lecture de ces propriétés

Il faut bien comprendre que les propriétés énoncées sont vérifiées pour A, B et C des parties quelconques de E.
Autrement dit, ces propriétés sont universellement quantifiées.

Par exemple, la propriété de transitivité comme suit.

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), \forall C \in \mathcal{P}(E),\ (A \subset B \texttt{ ET } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

($A \in \mathcal{P}(E)$ signifie que A est une partie de E)

Cette présentation, un peu lourde, rend difficile la lecture des propriétés. Nous l'éviterons donc dans les énoncés suivants.

Démontrer l'égalité de deux ensembles

- Par définition, $A = B$ si A et B ont les mêmes éléments. Ainsi, si $A = B$, tout élément x de A est élément de B (d'où $A \subset B$) et tout élément de B est élément de A (d'où $B \subset A$). La propriété *3*) est donc une équivalence.

$$\boxed{A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B \texttt{ ET } B \subset A)}$$

Cette équivalence fournit une méthode de démonstration. Pour montrer que $A = B$, on procédera généralement par **double inclusion**.

```
 Démontrons que A = B.
(⊂) Soit x ∈ A.
    ...démonstration ...
    Alors x ∈ B. On a donc démontré A ⊂ B.
(⊃) Soit x ∈ B.
    ...démonstration ...
    Alors x ∈ A. On a donc démontré B ⊂ A.
```

- Par ailleurs, A est différent de B (noté $A \neq B$) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} A \neq B \quad & \Leftrightarrow \quad \texttt{NON}(A \subset B \texttt{ ET } B \subset A) \\ & \Leftrightarrow \quad \texttt{NON}(A \subset B) \texttt{ OU } \texttt{NON}(B \subset A) \\ & \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A, x \notin B) \texttt{ OU } (\exists x \in B, x \notin A) \end{aligned}$$

- On dit que A est inclus strictement dans B, et on note $A \subsetneq B$, lorsque $A \subset B$ et $A \neq B$:

$$\begin{aligned} A \subsetneq B \quad & \Leftrightarrow \quad A \subset B \texttt{ ET } B \not\subset A \\ & \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A, x \in B) \texttt{ ET } (\exists x \in B, x \notin A) \end{aligned}$$

Notion de relation d'ordre

- Les points *2*), *3*), *4*) définissent la notion de **relation d'ordre**.
  La relation binaire $\leqslant$ (récip. $\geqslant$) est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
  La relation binaire $\subset$ est, quant à elle, une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
- Il est à noter que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par la relation $\leqslant$, ce qui signifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ (x \leqslant y) \ \texttt{ OU } \ (y \leqslant x)$$

- Par contre, la relation $\subset$ n'est pas totale sur $\mathcal{P}(E)$:

$$\exists (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), \ (A \not\subset B) \ \texttt{ ET } \ (B \not\subset A)$$

(c'est la négation de la propriété précédente)

I.2.d) L'ensemble des parties des éléments de E

Notation

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble composé de toutes les parties de E.

Remarque

- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.
  C'est donc un ensemble d'ensembles.
- Tout sous-ensemble A de E vérifie $A \subset E$. Mais comme A est une partie de E, cette propriété peut aussi s'écrire : $A \in \mathcal{P}(E)$.

$$\boxed{A \subset E \ \Leftrightarrow \ A \in \mathcal{P}(E)}$$

Propriétés *immédiates*

- Si $E = \varnothing$, on a $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$.
- Si $E = \{a\}$, on a $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}\}$.
- Si $E = \{a, b\}$, on a $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

On peut d'ailleurs démontrer que si E compte n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ compte 2^n éléments.

Exercice
On considère $A = \{\{1,2\}, 3, \varnothing\}$.

a. Combien d'éléments possède A ?

b. Détailler $\mathcal{P}(A)$.

Démonstration.

a. L'ensemble A possède 3 éléments. Le premier, noté $a_1 = \{1,2\}$, est un ensemble ; le deuxième, $a_2 = 3$, est un réel ; le troisième, $a_3 = \varnothing$, est un ensemble.

b. Détaillons $\mathcal{P}(A)$ en utilisant les notations précédentes.

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{P}(A) & = & \{ & \varnothing, \\ & & & \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \\ & & & \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \\ & & & \{a_1, a_2, a_3\} \qquad \} \end{array}$$

Enfin, en remplaçant les a_i par leur valeurs, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{P}(A) & = & \{ & \varnothing, \\ & & & \{\{1,2\}\}, \{3\}, \{\varnothing\}, \\ & & & \{\{1,2\}, 3\}, \{\{1,2\}, \varnothing\}, \{3, \varnothing\}, \\ & & & \{\{1,2\}, 3, \varnothing\} \qquad \} \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{P}(A)$ contient 8 éléments ($= 2^3$). □

I.3. Opérations ensemblistes

I.3.a) Réunion de parties de E

Définition

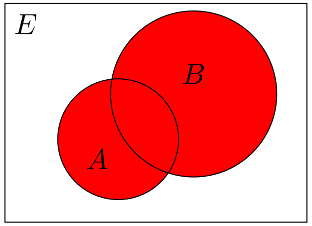
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle **réunion** de A et de B et on note $A \cup B$ **l'ensemble** suivant.

$$\boxed{A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \ \texttt{OU} \ (x \in B)\}}$$

- Autrement dit, pour $x \in E$, on a : $x \in A \cup B \ \Leftrightarrow\ (x \in A) \ \texttt{OU} \ (x \in B)$.

Représentation graphique.
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.



$A \cup B$

Propriétés *élémentaires*

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1) Propriétés de la loi $\cup$:

a. $A \cup B = B \cup A$
(la loi $\cup$ est commutative)

b. $A \cup \varnothing \ = \ \varnothing \cup A = A$
(l'ensemble vide est l'élément neutre de la loi $\cup$)

c. $A \cup E \ = \ E \cup A = E$
(l'ensemble E est l'élément absorbant de la loi $\cup$)

d. $A \cup A \ = \ A$
(tout élément A est idempotent pour la loi $\cup$)

e. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(la loi $\cup$ est associative)

2) Propriétés liant $\cup$ et $\subset$:

a. $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

b. $A \subset B \ \Rightarrow\ A \cup C \subset B \cup C$

c. $\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ C \subset D \end{array}\right\} \Rightarrow\ A \cup C \subset B \cup D$

d. $A \cup B = A \ \Leftrightarrow\ B \subset A$

Démonstration.
La seule difficulté de la démonstration réside dans la rédaction.
À titre d'illustration, développons les points ***2)c.*** et ***2)d.***

c. Supposons $A \subset B$ et $C \subset D$ et démontrons $A \cup C \ \subset\ B \cup D$.

Soit $x \in A \cup C$.

Ceci signifie que $x \in A$ ou $x \in C$. Deux cas se présentent alors :

- $\times$ si $x \in A$: alors, comme $A \subset B$, on a $x \in B$.
  Or $B \quad B \cup D$. On en déduit, comme $x \in B$ que $x \in B \cup D$.
- $\times$ si $x \notin A$: alors, comme $x \in A \cup C$, on a forcément $x \in C$.
  Or $C \subset D \subset B \cup D$. Comme $x \in C$, on en déduit que $x \in B \cup D$.

On en déduit que $x \in B \cup D$.

On remarque au passage que la propriété ***2)b.*** est un cas particulier de cette propriété ***2)c.*** En effet, il suffit d'appliquer ***2)c.*** avec $D = C$ pour obtenir la propriété ***2)b.***

d. Il s'agit ici de démontrer une équivalence.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A$ et démontrons $B \subset A$.

Soit $x \in B$.
Comme $B \subset A \cup B = A$, alors $x \in A$.

($\Leftarrow$) Supposons $B \subset A$ et démontrons $A \cup B = A$.
Il s'agit ici de démontrer une égalité. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in A \cup B$.
Ceci signifie que $x \in A$ ou $x \in B$. Deux cas se présentent alors :

- $\times$ si $x \in A$: alors on a bien $x \in A$.
- $\times$ si $x \notin A$: alors, comme $x \in A \cup B$, on a forcément $x \in B$.
  Or $B \subset A$. Comme $x \in B$, on en déduit que $x \in A$.

($\supset$) $A \cup B \supset A$ (c'est la $2^{\text{ème}}$ propriété).

□

Traiter une hypothèse du type $x \in A \cup B$

- Une hypothèse de la forme $x \in A \cup B$ signifie soit que $x \in A$, soit que $x \in B$ (éventuellement x appartient à la fois à A et à B). Pour traiter correctement ce type d'hypothèse, on réalise une disjonction de cas.

> ... *début de démonstration* ...
> `Ainsi` $x \in A \cup B$`. Deux cas se présentent alors :`
>
> $\times$ `si` $x \in A$ `:`
> ... *démonstration* ...
>
> $\times$ `si` $x \notin A$ `: alors, comme` $x \in A \cup B$`, on a` $x \in B$.
> ... *démonstration* ...

- Autrement dit, on étudie le cas $x \in A$ puis le cas $x \in B$. La rédaction précédente met en avant le caractère exhaustif de l'étude de cas.
  Ceci signifie qu'il n'y a pas d'autre cas à considérer.

I.3.b) Intersection de parties de E

Définition

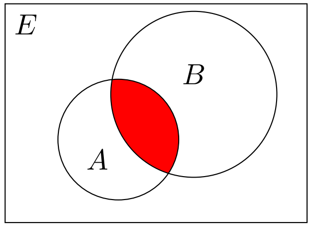
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle **intersection** de A et B et on note $A \cap B$ **l'ensemble** suivant.

$$\boxed{A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \ \texttt{ET}\ (x \in B)\}}$$

- Autrement dit, pour $x \in E$, on a : $x \in A \cap B \ \Leftrightarrow\ (x \in A) \ \texttt{ET}\ (x \in B)$.
- Deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

Représentation graphique.
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.



$A \cap B$

Propriétés *élémentaires*

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

1) Propriétés de la loi $\cap$:

a. $A \cap B = B \cap A$
(la loi $\cap$ est commutative)

b. $A \cap E \ = \ E \cap A = E$
(l'ensemble E est l'élément neutre de la loi $\cap$)

c. $A \cap \varnothing \ = \ \varnothing \cap A = \varnothing$
(l'ensemble vide est l'élément absorbant de la loi $\cap$)

d. $A \cap A \ = \ A$
(tout élément A est idempotent pour la loi $\cap$)

e. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(la loi $\cap$ est associative)

2) Propriétés liant $\cap$ et $\subset$:

a. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$

b. $A \subset B \ \Rightarrow \ A \cap C \subset B \cap C$

c. $\left.\begin{array}{c} A \subset B \\ C \subset D \end{array}\right\} \Rightarrow \ A \cap C \subset B \cap D$

d. $A \cap B = A \ \Leftrightarrow \ A \subset B$

I.3.c) Passage au complémentaire

Définition

Soit A une partie d'un ensemble E.

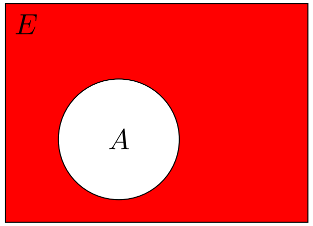
- On appelle **complémentaire** de A dans E et on note $\overline{A}^E$ l'ensemble suivant.

$$\boxed{\overline{A}^E = \{x \in E \mid x \notin A\}}$$

(le B.O. recommande d'utiliser la notation $\overline{A}$, moins précise, mais plus agréable, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de travail E)

- Autrement dit, pour $x \in E$, on a : $x \in \overline{A}^E \Leftrightarrow \texttt{NON}(x \in A)$.

Représentation graphique.
Soit A une partie d'un ensemble E.



$\overline{A}^E$

Propriétés *élémentaires*

Soit E un ensemble.

Soit A une partie de E.

$$\boxed{\left(\overline{\overline{A}^E}^E\right) = A} \qquad \boxed{\overline{E}^E = \varnothing} \qquad \boxed{\overline{\varnothing}^E = E}$$

I.3.d) Propriétés combinant les opérateurs de réunion, intersection et passage au complémentaire

Propriétés *liant* $\cup$, $\cap$ *et passage au complémentaire*

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

- $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
  (la loi $\cap$ est distributive par rapport à la loi $\cup$)
- $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$
  (la loi $\cup$ est distributive par rapport à la loi $\cap$)
- $\boxed{\overline{(A \cap B)} \; = \; \overline{A} \; \cup \; \overline{B}}$ et $\boxed{\overline{(A \cup B)} \; = \; \overline{A} \; \cap \; \overline{B}}$
  (lois de de Morgan)
- $A \; \cup \; \overline{A} = E$ et $A \; \cap \; \overline{A} = \varnothing$

Remarque

- La définition des opérateurs ensemblistes fait apparaître un lien fort entre ceux-ci et les connecteurs logiques usuels. Mettons en avant ces liens.

$$\begin{array}{ccc}
\texttt{ET}\ \textit{(noté aussi } \wedge\textit{)} & \longleftrightarrow & \cap \\
\texttt{OU}\ \textit{(noté aussi } \vee\textit{)} & \longleftrightarrow & \cup \\
\texttt{NON}(a)\,\textit{(noté aussi } \bar{a}\textit{)} & \longleftrightarrow & \bar{A} \\
\subset & \longleftrightarrow & \Rightarrow \\
= & \longleftrightarrow & \Leftrightarrow \\
\varnothing & \longleftrightarrow & faux \\
E & \longleftrightarrow & vrai
\end{array}$$

- Ce dictionnaire permet de traduire les propriétés énoncés au-dessus en des propositions logiques. On retrouve notamment les lois de de Morgan énoncées dans le **CH I**.
- Il est à noter que l'inclusion se traduit par une implication.
  Ceci provient du fait que :

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in E,\ (x \in A) \;\Rightarrow\; (x \in B))$$

I.3.e) Partition d'un ensemble E

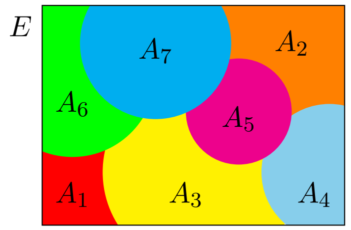
Définition

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E.

- On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de l'ensemble E si les propriétés suivantes sont vérifiées :
  (i) $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$,
  (ii) $\forall (i, j) \in I \times I,\ i \neq j \;\Rightarrow\; A_i \cap A_j = \varnothing$,
  (les ensembles sont deux à deux disjoints)
  (iii) $E = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Représentation graphique.

Soit $(A_i)_{i \in [\![1,7]\!]}$ une famille de parties d'un ensemble E.



Partition de l'ensemble E

$$E = \bigcup_{i=1}^{7} A_i$$

Remarque

La notion de partition est à rapprocher de celle de puzzle.
Les pièces sont les ensembles A_i de la partition. Posées les unes à côté des autres, ces pièces forment l'image à reconstituer *i.e.* l'ensemble E.

Notation

La notation $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ désigne **l'ensemble** des éléments qui sont dans au moins un des A_i, pour $i \in I$. Plus précisément :

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \;=\; A_1 \cup \ldots \cup A_n \;=\; \{x \in E \mid \exists i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i\}$
- $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \;=\; \{x \in E \mid \exists i \in \mathbb{N}^*,\ x \in A_i\}$
- De manière générale : $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \;\{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$

I.3.f) Différence ensembliste de parties de E

Définition

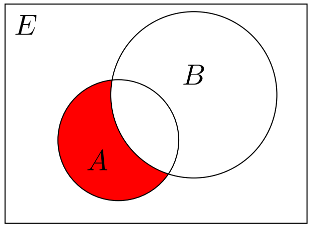
Soient A, B des parties d'un ensemble E.

- On appelle **différence ensembliste** de A et B et on note $A \setminus B$ l'ensemble suivant.

$$\boxed{\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in E \mid (x \in A) \texttt{ ET } (x \notin B)\} \\ &= A \;\cap\; \overline{B}^E \end{aligned}}$$

Représentation graphique.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.



$A \setminus B$

Propriété

Soit E un ensemble et A une partie de E.

$$\boxed{\overline{A}^E = E \setminus A}$$

I.4. Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soient E et F deux ensembles.

- Le **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) avec x élément de E et y élément de F.

$$\boxed{E \times F \;=\; \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}}$$

- Ainsi, tout élément u de l'ensemble $E \times F$ s'écrit sous la forme $u = (u_1, u_2)$ avec $u_1 \in E$ et $u_2 \in F$.

Remarque

- On a utilisé dans cette définition la notion intuitive de couple. Un couple est une paire **ordonnée** d'éléments. Ainsi le couple (x, y) ne doit pas être confondu avec (y, x). Plus précisément, on a :

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; (x_1 = x_2 \texttt{ ET } y_1 = y_2)$$

- Lorsque $E = F$, on note $E \times E$ ou tout simplement E^2.

  Ainsi, on écrira sans distinction $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$.
- Cette définition se généralise à n ensembles.

  L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est constitué des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où chaque $x_i \in E_i$.

  Dans le cas où $E_1 = \ldots = E_n$, on écrit sans distinction E^n ou $E \times \ldots \times E$.

  En particulier : $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.
- Si E a p éléments et F a q éléments, l'ensemble $E \times F$ compte pq éléments.

Exercice

Soient E et F deux ensembles.

Soient A une partie de E ($A \subset E$) et B une partie de F ($B \subset F$).

Montrer que : $A \times B \ \subset \ E \times F$.

Démonstration.
Soit $u \in A \times B$.
Cela signifie qu'il existe $u_1 \in A$ et $u_2 \in B$ tels que $u = (u_1, u_2)$.

- Comme $u_1 \in A$ et $A \subset E$, on en déduit que $u_1 \in E$.
- Comme $u_2 \in B$ et $B \subset F$, on en déduit que $u_2 \in F$.

Ainsi, on a $u = (u_1, u_2) \in E \times F$. □

II. Applications

II.1. Notion d'application

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Une **application** f de E dans F (notée $f : E \to F$) est un procédé permettant d'associer à chaque élément x de l'ensemble E, un et un seul élément y de l'ensemble F.

- L'élément y de cette définition est alors appelé l'**image** de x par l'application f et est noté $y = f(x)$.
- E s'appelle l'**ensemble de départ** de l'application.
- F s'appelle l'**ensemble d'arrivée** de l'application.
- Si $y \in F$, deux cas se présentent.
  - × Soit il existe au moins un élément x de E dont y est l'image.
    On dit dans ce cas que x est un **antécédent** de y par f.
  - × Soit y n'admet pas d'antécédent par l'application f.
- On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}\, f$, l'ensemble des éléments y de F qui admettent des antécédents par f.

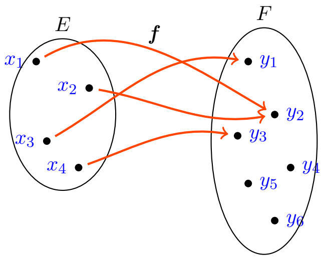
$$\boxed{\mathrm{Im}\, f = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}}$$

- Par définition, on a toujours $\boxed{\mathrm{Im}\, f \ \subset \ F}$ mais pas forcément égalité.
- On note $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
- Enfin, si $E = F$, l'application qui à chaque x élément de E associe ce même élément x est appelée l'**identité** sur E et se note id_E.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E \ : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Représentation graphique.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.



Différence entre application et fonction.

- La définition d'application stipule que tout élément x de E admet une unique image par f, ce qui s'écrit :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, \ y = f(x)$$

(à ne pas confondre avec la notion de bijectivité !)

- Sur le schéma précédent, cela signifie que d'un élément x_i part forcément une flèche mais seulement une.
- Dans la définition de fonction, on relâche cette contrainte en exigeant seulement qu'un élément x de E admet **au plus** une image par f.

  D'un élément $x \in E$ peut ne pas partir de flèche, ce qui signifie alors que la fonction f n'est pas définie en x.
- Par exemple, on peut parler de la fonction inverse (notée $f : x \mapsto \frac{1}{x}$) sans préciser son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée et déterminer, dans un second temps, son ensemble de définition.
- Plus précisément, l'objet f suivant :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

est une fonction mais pas une application puisque f n'est pas définie en 0. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Égalité de deux applications

- Deux applications $f : E_1 \to F_1$ et $g : E_2 \to F_2$ sont **égales** si :
  - × elles ont même ensemble de départ : $E_1 = E_2$,
  - × même ensemble d'arrivée $F_1 = F_2$,
  - × et vérifient : $\forall x \in E_1, f(x) = g(x)$.
- Par exemple, les objets f_1 et f_2 suivants :

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}^{-*} & \to & \mathbb{R}^{-*} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

sont des applications différentes et ce même si elles sont construites à l'aide du même procédé $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Définition

Soient E et F deux ensembles et soit $A \subset E$.

Soit $f : E \to F$.

- L'**image** (**directe**) de l'ensemble A par l'application f, notée $f(A)$, est l'ensemble des images par f des éléments de A. Autrement dit :

$$\boxed{f(A) \ = \ \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f(x)\}} \ = \ \{f(x) \mid x \in A\} \ \subset \ F$$

- En particulier, on a : $\boxed{f(E) \ = \ \mathrm{Im}(f)}$

Soit $f : E \to F$ une application. Il ne faut pas confondre :

- $\mathrm{Im}(f)$ l'image de l'application f.
  (l'ensemble des images : $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$*)*
- F l'ensemble d'arrivée de l'application f.

Comme déjà précisé : $\mathrm{Im}(f) \subset F$ mais pas forcément $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice

Soient $f : E \mapsto F$ une application et A_1 et A_2 des parties de E.

a. Démontrer que : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b. Démontrer que : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

c. A-t-on égalité ?

Démonstration.

a. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
Alors il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$.
Ceci signifie que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$. Deux cas se présentent alors :

- $\times$ si $x \in A_1$: alors on a $y = f(x) \in f(A_1)$.
- $\times$ si $x \notin A_1$: alors, comme $x \in A_1 \cup A_2$, on a forcément $x \in A_2$.
  On en déduit que $y = f(x) \in f(A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

($\supset$) Soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
Ceci signifie que $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. Deux cas se présentent alors :

- $\times$ si $y \in f(A_1)$: il existe donc $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$.
  Or $A_1 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
  D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
- $\times$ si $y \notin f(A_1)$: alors comme $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, on a forcément $y \in f(A_2)$. Il existe donc $x \in A_2$ tel que $y = f(x)$.
  Or $A_2 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
  D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

b. Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$.
Alors il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$.

- Comme $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, on a : $x \in A_1$ et donc $f(x) \in f(A_1)$.
- De même, $A_1 \cap A_2 \subset A_2$, et donc $f(x) \in f(A_2)$.

On en déduit que $f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

c. Il n'y a pas égalité. Il suffit d'exhiber un contre-exemple pour s'en convaincre.
Par exemple, on prend $A_1 = \mathbb{R}^-$, $A_2 = \mathbb{R}^+$ et $f : x \mapsto |x|$.
On a alors :

- $f(A_1 \cap A_2) = f(\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+) = f(\{0\}) = \{0\}$
- $f(A_1) = f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$ et $f(A_2) = f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.
  D'où $f(A_1) \cap f(A_2) = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.

□

II.2. Restriction

Définition

Soient E et F deux ensembles et A une partie de E.

Soit $f : E \to F$ une application.

- La **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :

$$f_{|A} \ : \ \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- Autrement dit, on a : $\boxed{\forall x \in A, \ f_{|A}(x) \ = \ f(x)}$
- On a alors : $\boxed{\mathrm{Im}\, f_{|A} = f(A)}$

Soit $x \in E$ et $A \subset E$.
Il ne faut pas confondre les objets $f(x)$ et $f(A)$ qui sont de nature très différente :

- $\times$ $f(x)$ est un élément de F,
- $\times$ $f(A)$ est un ensemble (sous-ensemble de F).

II.3. Composée de deux applications

Définition

Soient E, F et G trois ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

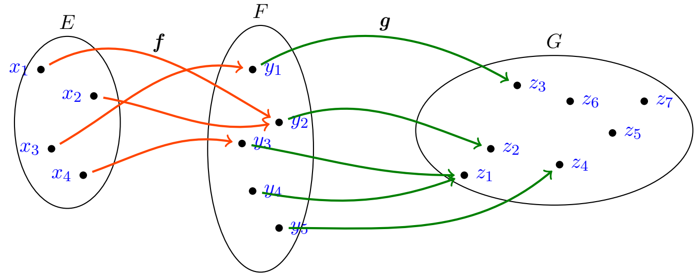
- La **composée** de f par g, notée $g \circ f$, est l'application :

$$g \circ f \quad : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

- Autrement dit, on a : $\boxed{\forall x \in E, \ (g \circ f)(x) = g(f(x))}$

Représentation graphique.

Soient E, F et G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications.



Remarque

Les ensembles de départ et d'arrivée des applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ ont un rôle crucial pour la bonne définition de $g \circ f$. Plus précisément :

$$\boxed{g \circ f \text{ est bien définie } \Leftrightarrow \ f(E) \subset F}$$

La loi $\circ$ n'est pas **commutative**.
Ceci signifie que, de manière générale, $f \circ g \neq g \circ f$.
Deux raisons possibles à cela.

1) D'après la remarque précédente, $g \circ f$ peut-être définie sans que $f \circ g$ le soit (et inversement).

2) Même si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies (c'est par exemple le cas lorsque $E = F = G$), les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont généralement différentes.

Exemple

Considérons les applications suivantes :

$$f \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies. Toutefois, on a :

$$\begin{array}{rcl} (f \circ g)(x) & = & f(g(x)) \\ & = & f(x^2) \\ & = & x^2+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (g \circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g(x+1) \\ & = & (x+1)^2 \end{array}$$

Les deux applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont différentes.

Exercice

On considère les deux applications f et g de $[\![1, 9]\!]$ dans lui-même définies par leurs tables de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

Représenter de la même façon les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$.

Les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$ sont données par :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \circ g(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \circ f(x)$	6	4	3	8	9	7	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ f(x)$	3	8	5	1	2	7	9	6	4

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ g(x)$	6	4	5	8	9	3	7	1	2

Propriété

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f \circ \mathrm{id}_E & = & f \\ \mathrm{id}_F \circ f & = & f \end{array}}$$

Propriété

Soient E, F, G trois ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

Soit $h : G \to H$ une application.

On a alors : $\boxed{h \circ (g \circ f) \ = \ (h \circ g) \circ f}$

(la loi $\circ$ est associative)

Remarque

Avec les notations précédentes, on a :

- $h \circ g : F \to H$,
- $g \circ f : E \to G$,
- $h \circ g \circ f : E \to H$.
  (la notation $h \circ g \circ f$ est autorisée du fait de l'associativité de la loi $\circ$)

II.4. Caractère injectif, surjectif, bijectif des applications

II.4.a) Injectivité

Définition

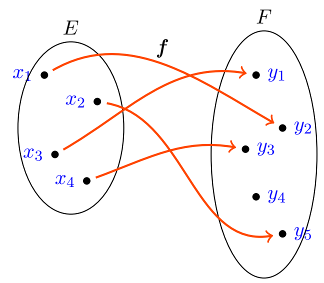
Soient E et F deux ensembles.

- Une application $f : E \to F$ est **injective** si tout couple d'éléments distincts de E fournit deux images distinctes par f.

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2, \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Représentation graphique.

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.



Exemple d'application injective et non injective.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est injective.

En effet, si x_1 et x_2 sont deux éléments de E tels que $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est non injective.

En effet, $-1 \neq 1$ et $g(-1) = 1 = g(1)$.

3) Par contre, $g_{|\mathbb{R}^+}$ est bien injective.

Propriété

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{f \text{ injective } \Leftrightarrow \text{ Tout élément } y \in F \text{ admet au plus un antécédent par } f}$$

Démonstration.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons par l'absurde que f est injective et qu'il existe un élément $y \in F$ admettant strictement plus d'un antécédent par f.
Alors il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = y = f(x_2)$.
Ceci contredit l'injectivité de f.

($\Leftarrow$) Supposons que tout élément $y \in F$ admet au plus un antécédent par f.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Notons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Alors on a forcément $y_1 \neq y_2$ car sinon y_1 posséderait deux antécédents distincts x_1 et x_2. □

Démontrer qu'une application est injective

On peut utiliser la définition équivalente, stipulant qu'une application est injective si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Cette définition est l'écriture contraposée de la définition initiale.
(on a même : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$)

```
Démontrons que f : E → F injective.

 Soit (x1, x2) ∈ E².
 On suppose que f(x1) = f(x2).  ...démonstration
 ...
 Alors x1 = x2.
 On a donc démontré que f est injective.
```

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow\ g \circ f : E \to G \text{ est injective}}$$

Autrement dit, la composée de deux applications injectives est injective.

Démonstration.
Supposons f et g injectives et démontrons que $g \circ f : E \to G$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Autrement dit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
Or, comme g est injective, on en déduit que : $f(x_1) = f(x_2)$.
Or, comme f est injective, on en déduit que : $x_1 = x_2$.

Ainsi $g \circ f$ est injective. □

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{g \circ f \text{ est injective } \Rightarrow\ f \text{ injective}}$$

Démonstration.
Supposons $g \circ f$ injective et démontrons que $f : E \to F$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
On a alors : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
(égalité obtenue en composant chaque membre de l'égalité précédente par g)
Autrement dit : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Or, comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que : $x_1 = x_2$.

Ainsi f est injective. □

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

$$\boxed{f \text{ strictement croissante } \Rightarrow f \text{ est injective}}$$

Démonstration.
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \neq x_2$.
Quitte à renommer x_1 et x_2, on peut supposer que : $x_1 > x_2$.
Or, la fonction f est strictement croissante. On a donc : $f(x_1) > f(x_2)$.
Ainsi : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

On en conclut que f est injective. □

II.4.b) Surjectivité

Définition

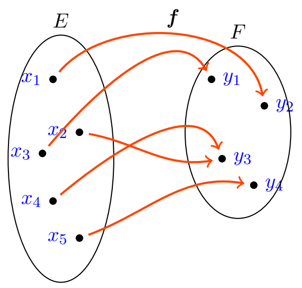
Soient E et F deux ensembles.

- Une application f de E dans F est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f.

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, \ y = f(x)}$$

- Autrement dit, f surjective si : $\boxed{\operatorname{Im} f = F}$

Représentation graphique.
Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application surjective.



Exemple d'application surjective et non surjective.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est surjective. En effet, tout élément y de $\mathbb{R}$ est atteint par f puisque $y = f(y)$.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est non surjective. En effet, -1 ne peut s'écrire comme le carré d'un réel (il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $-1 = x^2$).

3) Par contre, $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bien surjective. En effet, tout $y \in \mathbb{R}^+$ peut s'écrire sous la forme $y = h(\sqrt{y})$. On a bien $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

Démontrer qu'une application est surjective
La propriété définissant la surjectivité fournit le schéma de rédaction suivant.

> `Démontrons que` $f : E \to F$ `surjective.`
>
> `Soit` $y \in F$.
> `Exhibons` $x \in E$ `tel que` $y = f(x)$.
> ... *démonstration* ...
> `Alors` $y = f(x)$.
> `On a donc démontré que` f `est surjective.`

Remarque

- L'élément y nommé au début de la démonstration est un élément de l'ensemble F. Le but de la démonstration est de démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ce qui signifie que $y \in \operatorname{Im}(f)$ $(= f(E))$.
- On démontre donc que tout élément $y \in F$ vérifie $y \in \operatorname{Im}(f)$.
  Autrement dit : $F \subset \operatorname{Im}(f)$.
- Comme on a toujours $\operatorname{Im}(f) \subset F$, on démontre ainsi : $\operatorname{Im}(f) = F$.

> On l'a déjà dit : il ne faut pas confondre F et $\operatorname{Im}(f)$.
> Ces deux ensembles ne sont égaux que si f est surjective.

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f : E \to G \text{ est surjective}$$

Autrement dit, la composée de deux applications surjectives est surjective.

Démonstration.
Supposons f et g surjectives et démontrons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $y \in G$.
Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Comme $g : F \to G$ est surjective, il existe $u \in F$ tel que $y = g(u)$.
Comme $f : E \to F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $u = f(x)$.
On a alors : $y = g(u) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Ainsi $g \circ f$ est surjective. □

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$g \circ f \text{ est surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective}$$

Démonstration.
Supposons $g \circ f$ surjective et démontrons que g est surjective.

Soit $y \in G$.
Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$.
Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $u \in E$ tel que $y = g \circ f(u) = g(f(u))$.
Notons $x = f(u)$. Alors $x \in F$ et x vérifie $y = g(x)$.

Ainsi f est surjective. □

Propriété

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Alors l'application $\tilde{f} \ : \begin{array}{ccc} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est surjective.

Démonstration.
Soit $y \in f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.
Alors, par définition de $f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = \tilde{f}(x)$.
Ainsi $\tilde{f}$ est surjective. □

Remarque

- C'est une manière classique de rendre une fonction surjective.
- Cette propriété est notamment utilisé dans le théorème de la bijection.

  Plus précisément, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est telle que :
  × f est strictement croissante sur $[a, b]$,
  × f est continue sur $[a, b]$,
  alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $f([a, b])$. En effet :
  a) Comme f est strictement croissante, elle est injective.
  b) On rend alors cette fonction surjective modifiant son ensemble d'arrivée.
  Plus précisément, $f : [a, b] \to f([a, b])$ est surjective.
- Notez que nous n'avons pas eu besoin dans la démonstration précédente du caractère continue de la fonction f. Dès lors, à quoi sert cette hypothèse ?
  (i) Si f est continue, alors $f([a, b])$ est l'image d'un intervalle par une fonction continue. C'est donc un intervalle.
  (ii) Sous l'hypothèse de continuité de f on a la propriété :
  $$f \text{ injective} \ \Rightarrow \ f \text{ strictement monotone}$$
  La réciproque étant toujours vérifiée, on obtient une caractérisation des applications strictement monotones. Si f est continue, on a :
  $$f \text{ injective} \ \Leftrightarrow \ f \text{ strictement monotone}$$

II.4.c) Bijectivité

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit que l'application $f : E \to F$ est **bijective** ou définit une **bijection** de E dans F si f est injective et surjective.
- Ainsi, l'application $f : E \to F$ est **bijective** si tout élément $y \in F$ admet un et un seul antécédent $x \in E$ par f. Autrement dit :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists ! x \in E, \ y = f(x)}$$

Remarque

Si $f : E \to F$ est une application bijective :

× f est une application : donc à tout élément x de E correspond un et un seul élément y de F,

× f est bijective : donc à tout élément y de F est associé un unique élément x de E par f (x est l'antécédent de y par f).

On en conclut qu'il y a « autant » d'éléments dans E que dans F.

Définition

Soient E et F deux ensembles.

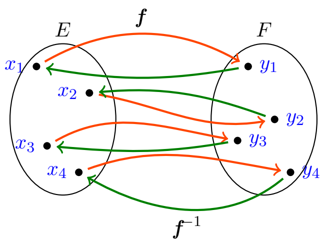
Soit $f : E \to F$ une application **bijective**.

- La (bijection) réciproque associée à f, notée $f^{-1} : F \to E$, est l'application de F dans E qui, à chaque y de F, associe son unique antécédent x par f.
- On a alors : $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F, \ x = f^{-1}(y) \ \Leftrightarrow \ y = f(x)}$

  ($f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f)

Représentation graphique.

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.



Exemple d'application bijective et non bijective.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est bijective car elle est à la fois injective et surjective.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas bijective. En fait, elle n'est ni injective ni surjective.

3) Par contre, $t : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bien bijective puisqu'elle est à la fois injective est surjective. Tout $y \in \mathbb{R}^+$ s'écrit d'une unique manière comme un carré : $y = (\sqrt{y})^2 = t(y)$.

Propriétés

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application **bijective**.

a. L'application réciproque f^{-1} est bijective et $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

b. *1)* $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F, \ (y = f(x) \ \Leftrightarrow \ x = f^{-1}(y))}$

2) $\boxed{\forall y \in F, \ f(f^{-1}(y)) \ = \ y}$

3) $\boxed{\forall x \in E, \ f^{-1}(f(x)) \ = \ x}$

Proposition 1.

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \textit{ et } g \textit{ sont bijectives.} \\ \textit{De plus : } g = f^{-1} \textit{ et } f = g^{-1} \end{array}}$$

Démonstration.

a. On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Or id_E est une bijection de E dans E.
Donc $g \circ f$ est bijective. On en déduit que $g \circ f$ est notamment surjective.
Ainsi g est surjective.

De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Or id_F est une bijection de F dans F.
Donc $f \circ g$ est bijective. On en déduit que $f \circ g$ est notamment injective.
Ainsi g est injective.

On en déduit que g est bijective.
On démontre de la même manière que f est bijective.

b. La réciproque de f est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par f.
Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.
L'élément $g(y)$ est un antécédent de y par f.
Comme f est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\forall y \in F,\ g(y) = f^{-1}(y)$.
Autrement dit : $g = f^{-1}$. □

Proposition 2.

Soient E, F et G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

- *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors la composée $g \circ f : E \to G$ est une bijection, et on a :*

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Démonstration.

Le caractère associatif de la loi $\circ$ (parenthésage comme bon nous semble) nous permet d'écrire :

$$\begin{array}{cl} & (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\ = & g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \\ = & g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ = & g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} \\ = & (g \circ \mathrm{id}_F) \circ g^{-1} \\ = & g \circ g^{-1} \ = \ \mathrm{id}_G \end{array} \qquad \begin{array}{cl} & (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ = & f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ = & f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ = & f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f \\ = & (f^{-1} \circ \mathrm{id}_F) \circ f \\ = & f^{-1} \circ f \ = \ \mathrm{id}_E \end{array}$$

D'après la proposition 1, $g \circ f$ est bijective, de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Méthodologie : déterminer la réciproque d'une application

- Par une étude théorique : via la proposition 1.

  Exercice
  Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$.
  Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

- Par calcul : en inversant l'égalité $y = f(x)$

  Exercice
  On considère l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-5\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x-3}{x+5} \end{array}$$

a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

b. Répondre aux mêmes questions pour $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

Exercice
Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$.
Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que : $\begin{array}{rcl} (f \circ f) \circ f &=& \mathrm{id}_E \\ f \circ (f \circ f) &=& \mathrm{id}_E \end{array}$.
Par la proposition 1, on en conclut que f est bijective et que $f^{-1} = f \circ f$. □

Exercice
On considère l'application :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{-5\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x-3}{x+5} \end{array}$$

a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

On souhaite démontrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists\, !\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\},\ y = g(x)$$

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On résout l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
Pour ce faire, on raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{rrcll}
 & y &=& g(x) & (1) \\
\Leftrightarrow & y &=& \dfrac{2x-3}{x+5} & (2) \\
\Leftrightarrow & y(x+5) &=& 2x-3 & (3) \\
\Leftrightarrow & x(y-2) &=& -3-5y & (4) \\
\Leftrightarrow & x &=& \dfrac{3+5y}{2-y} & (5)
\end{array}$$

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Notons $x = \dfrac{3+5y}{2-y}$.

- Alors $x \neq -5$. En effet, on aurait sinon : $-5 = \dfrac{3+5y}{2-y}$.

  Et donc $-10 + 5y = 3 + 5y$ et ainsi $-10 = 3$ ce qui est impossible.
- D'autre part, on a :

$$g(x) = \frac{2x-3}{x+5} = \frac{2\,\frac{3+5y}{2-y} - 3}{\frac{3+5y}{2-y} + 5} = \frac{\frac{2(3+5y)-3(2-y)}{2-y}}{\frac{3+5y+5(2-y)}{2-y}} = \frac{13y}{\cancel{2-y}} \times \frac{\cancel{2-y}}{13} = y$$

L'unicité de x est donnée par le raisonnement par équivalence précédent.
Ainsi, $g : \mathbb{R}\backslash\{-5\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est : $g^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-5\} \\ x & \mapsto & \dfrac{3+5x}{2-x} \end{array} \right.$

b. Répondre aux mêmes questions pour $h : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

On souhaite démontrer que :

$$\forall y \in\,]-1,1[, \exists\, !\, x \in \mathbb{R},\ y = h(x)$$

Soit $y \in\,]-1,1[$. On résout l'équation $y = h(x)$ d'inconnue x. Pour ce faire, on raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{rrcll}
 & y &=& h(x) & (1) \\
\Leftrightarrow & y &=& \dfrac{x}{1+|x|} & (2) \\
\Leftrightarrow & y(1+|x|) &=& x & (3) \\
\Leftrightarrow & |x|\ y - x &=& -y & (4) \\
\Leftrightarrow & x(\mathrm{sgn}(x)\ y - 1) &=& -y & (5) \\
\Leftrightarrow & x &=& \dfrac{-y}{\mathrm{sgn}(x)\ y - 1} & (6)
\end{array}$$

On a introduit la fonction *signe* qui est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{sgn} \ : \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

(en particulier, on a : $\mathrm{sgn}(x)\ x \ = \ |x|$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*)*

On remarque enfin que, comme $1 + |x| > 0$, si $y = \dfrac{x}{1+|x|}$ alors on a $\mathrm{sgn}(y) = \mathrm{sgn}(x)$.

On en déduit que :

$$y = h(x) \ \Leftrightarrow \ x = \frac{-y}{\mathrm{sgn}(y)\ y - 1} = \frac{-y}{|y| - 1}$$

Soit $y \in \,]-1,1[$.

Notons $x = \dfrac{-y}{|y|-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{1+|x|} = \frac{\frac{-y}{|y|-1}}{1 + \left|\frac{-y}{|y|-1}\right|} = \frac{-y}{|y|-1} \times \frac{1}{1 + \frac{|-y|}{||y|-1|}} = \frac{-y}{|y|-1} \times \frac{1}{1 + \frac{|y|}{1-|y|}} \\ &= \frac{-y}{|y|-1} \times \frac{1}{\frac{1}{1-|y|}} = \frac{-y}{-1} = y \end{aligned}$$

($||y|-1| = 1 - |y|$ *car* $|y| < 1$*)*

L'unicité de x est donnée par le raisonnement par équivalence précédent.

Ainsi, $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est : $h^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{-x}{|x|-1} \end{array} \right.$