Feuille d'exercices n°7 : Ensembles et applications

Opérateurs ensemblistes

Exercice 1. (☆)
Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ ainsi que $\overline{A} \cap B$.

a. $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,4\}$

b. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 3]$, $B = [2; +\infty[$

c. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$, $B = [3; +\infty[$

d. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0; +\infty[$

Exercice 2. (★)
X, Y et Z désignent des ensembles.
Démontrer les affirmations suivantes :

a. Si $X \subset Y$ alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$.

b. $(X \subset Y) \Leftrightarrow (X = X \cap Y)$

c. $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$

d. $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = X \cap Y \cap Z$

Exercice 3. (★) *(Un peu de différence ensembliste ...)*

a. Que valent $A \setminus \emptyset$ et $A \setminus A$?

b. Montrer que $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

c. Montrer que $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Exercice 4. (★) *(Un peu de différence symétrique ...)*
Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B, notée $A \Delta B$ par : $\boxed{A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$

a. Que valent $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$?

b. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

c. Montrer que $A \Delta B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

d. Montrer que $(A \Delta B) \Delta B = A$.

Exercice 5. (★)
Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

a. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b. Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c. Montrer que : $(A \cap B = A \cup B) \;\Leftrightarrow\; A = B$.

Exercice 6. (★)
A, B, C étant trois parties d'un ensemble E, montrer que :

$$\left.\begin{array}{ccc} A \cup B & \subset & A \cup C \\ A \cap B & \subset & A \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B \subset C$$

Exercice 7. (☆) *(De la bonne utilisation du quantificateur universel ...)*
Soit A une partie d'un ensemble E. Démontrer que :

a. $(\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cup X = E) \;\Rightarrow\; A = E$.

b. $(\forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X = \emptyset) \;\Rightarrow\; A = \emptyset$.

Exercice 8. (★)
A et B étant deux parties d'un ensemble E, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
a. $A \subset B$ ***b.*** $(E \setminus B) \subset (E \setminus A)$ ***c.*** $B \cup (E \setminus A) = E$

Ensemble des parties d'un ensemble E

Exercice 9. (★)
On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.
a. Détailler $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et $\mathcal{P}(F)$.
b. Est-ce que l'un est inclus dans l'autre ?

Exercice 10. (★★)
Soient A et B deux ensembles.
1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. ***a.*** Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
b. Y a-t-il égalité ?

Image d'une application

Exercice 11. (☆)
On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

Déterminer $f([0,3])$, $f([-1,2])$, $f(\mathbb{R})$.

Exercice 12. (★)
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application définie et continue sur un intervalle I.
1) Si f est strictement croissante, que vaut $f(I)$ dans le cas où :
a. $I = [a, b]$ ***b.*** $I =]a, b]$ ***c.*** $I =]a, b[$ ***d.*** $I = [a, b[$
2) Répondre à la même question lorsque f est strictement décroissante.
3) Que peut-on dire dans le cas où f est simplement (dé)croissante ?
Et si l'on ne connaît pas la monotonie de f ?

Exercice 13. (★)
Soient $f : E \mapsto F$ une application et A_1 et A_2 des parties de E.
a. Démontrer que : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
b. Démontrer que : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 14
L'image réciproque d'un ensemble B par une application $f : E \to F$, notée $f^{-\mathbb{1}}(B)$, est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.

$$\boxed{f^{-\mathbb{1}}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$$

a. Montrer que : $\forall (B_1, B_2) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cup B_2) = f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cup f^{-\mathbb{1}}(B_1)$
b. Montrer que : $\forall (B_1, B_2) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ f^{-\mathbb{1}}(B_1 \cap B_2) = f^{-\mathbb{1}}(B_1) \cap f^{-\mathbb{1}}(B_1)$

Composée de fonctions

Exercice 15. (☆)
On considère les deux applications f et g de $[\![1, 9]\!]$ dans lui-même définies par leurs tables de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

a. Réprésenter de la même façon les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$.
b. Montrer que f est bijective et représenter de la même façon sa réciproque.

Exercice 16. (☆)
Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n + 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} g(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) = n - 1 \end{array} \right.$$

a. Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité, éventuelle de f et g.
b. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Caractère injectif / surjectif / bijectif

Exercice 17. (☆)
Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = id_E$.
Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Exercice 18. (☆)
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

a. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

b. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 19. (☆)
Soient E, F, G trois ensembles, $g : E \to F$, $h : E \to F$, $f : F \to G$ trois applications. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = f \circ h \\ f \text{ injective} \end{array}\right\} \Rightarrow g = h$$

Exercice 20. (★)
Soit $f : E \to F$ une application. Que signifient les propositions suivantes ?

a. $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ y = f(x)$

b. $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$

c. $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ y = f(x)$

Exercice 21. (★★)
On considère l'application $g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array} \right.$

a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

b. Répondre aux mêmes questions pour $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

Exercice 22. (★)
Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

a. $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***e.*** $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***i.*** $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$

b. $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***f.*** $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***j.*** $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

c. $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***g.*** $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ ***k.*** $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

d. $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ ***h.*** $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ ***l.*** $\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

Exercice 23. (★)

a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Montrer que si f est strictement croissante alors f est injective.

b. Le résultat précédent est-il vérifié si f est strictement décroissante ?

c. Trouver les solutions de l'équation en x : $x + e^x = 1$.

Exercice 24. (★★)
Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : E \to G$ deux applications. On considère la fonction h suivante.

$$h \ : \left| \begin{array}{rcl} E & \mapsto & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$$

a. Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b. On suppose f et g surjectives. La fonction h est-elle surjective ?

Exercice 25. (★★)

a. L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$?

b. L'application $x \mapsto x^2$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$? Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{Q}^+$?

Exercice 26. (★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

a. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y.

b. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

c. Montrer que $\forall x \in [-1,1], f(x) \in [-1,1]$.
La restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ de f est-elle bijective ?

Exercice 27. (★★)
Soient E, F, G, H des ensembles, $f \in \mathcal{A}(E,F)$, $g \in \mathcal{A}(F,G)$, $h \in \mathcal{A}(G,H)$. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

Démontrer que f, g, h sont bijectives.
(on pourra utiliser le résultat de l'exercice 18)

Des propriétés contre-intuitives

Exercice 28. (☆)
On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

Démontrer que l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \right.$ est bijective.

(conclusion : il y a autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels !)

Exercice 29. (★★)
Démontrer que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

Applications sur $\mathcal{P}(E)$

Exercice 30. (★)
Soit E un ensemble, $A \in \mathcal{P}(E)$. On note :

$$\varphi_A \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cap X \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi_A \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{array}$$

a. Sous quelle condition φ_A est-elle surjective ? Injective ?

b. Même question pour ψ_A.

Exercice 31. (★★★)
Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E.

On considère l'appication $f : \left| \begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) & \times & \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A & , & X \cap B) \end{array} \right.$

a. Démontrer que : (f est injective) $\Rightarrow (A \cup B = E)$.

b. Démontrer que : (f est injective) $\Leftarrow (A \cup B = E)$.
(on pourra procéder par l'absurde et penser à former $X \cap (A \cup B)$ ainsi que $X \cap \overline{(A \cup B)}$)

c. Démontrer que : f est surjective $\Leftarrow A \cap B = \emptyset$.

d. Démontrer que : f est surjective $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
(on pourra procéder par l'absurde et raisonner sur l'existence d'un antécédent à $(A \setminus A \cap B, A \cap B)$)

e. Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1}.