CH IX : Probabilités sur un univers fini

I. Espace probabilisable fini

I.1. Notion d'expérience aléatoire

Définition

- On appelle expérience aléatoire toute expérience dont le résultat ne peut être prédit de manière certaine. Autrement dit, une expérience dont le résultat dépend du hasard.

Commençons par introduire, au travers d'exemples, les définitions que l'on va poser par la suite.

Exemple

1) Expérience : on effectue un lancer d'un dé 6.

- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  L'univers d'une expérience est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- Événement A : le résultat obtenu est pair.
  Un événement est une propriété de l'expérience qui peut être vérifiée ou non. Un événement est donc entièrement déterminé par l'ensemble des résultats pour lesquels elle est vérifiée.
  $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$
- Notons ω le résultat de l'expérience.
  On dit que l'événement A est réalisé si le résultat de l'expérience vérifie l'événement. Autrement dit, si : $\omega \in A$

2) Expérience : on considère une urne contenant 3 boules numérotées. L'expérience consiste au tirage successif et sans remise de ces 3 boules.

- Univers : $\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$.
  L'univers est l'ensemble des 3-listes possibles.
- Événement B : le résultat obtenu représente un entier inférieur à 229.
  $B = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\} \subset \Omega$
- Notons ω le résultat de l'expérience.
  L'événement est notamment réalisé si son résultat est $\omega = (1, 3, 2)$.

3) Expérience : on considère une urne contenant 5 boules numérotées. On effectue maintenant un tirage simultané de trois boules dans l'urne.

- Univers : $\Omega = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$.
  L'univers est l'ensemble des 3-combinaisons possibles : il y en a $\binom{5}{3}$.
- Événement B : la somme des chiffres inscrits sur les boules est un multiple de 3.
  $B = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\} \subset \Omega$
- Notons ω le résultat de l'expérience.
  L'événement est notamment réalisé si son résultat est $\omega = \{1, 3, 5\}$.

I.2. Espace probabilisable fini

Définition

On appelle **espace probabilisable fini** la donnée du couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ où :

- Ω est ensemble fini appelé **univers** (ou univers des possibles).
  C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
  ($\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$)
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des **événements**.
- Les singletons $\{\omega_i\}$ sont appelés **événements élémentaires**.
- Un événement $A \subset \Omega$ est dit **réalisé** si le résultat de l'expérience est un élément de A.

I.3. Événements

Définition *(Vocabulaire)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ un couple d'événements.

- L'événement $\varnothing$ est l'événement **impossible** et Ω est l'événement **certain**.
- Si $A \cap B = \varnothing$, les événements A et B sont dits **incompatibles**.
- Si $A \subset B$, on dit que l'événement A implique l'événement B.
  (si A est réalisé, B l'est aussi)
- Si $C = A \cup B$, l'événement C est réalisé si A l'est ou B l'est.
- Si $C = A \cap B$, l'événement C est réalisé si A l'est et B l'est.
- L'événement $\overline{A}$, événement **contraire** de A, est réalisé si A ne l'est pas.

Définition *(Système complet d'événements)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ une espace probabilisable fini.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ une famille d'événements.

- La famille $(A_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ est un **système complet d'événements fini** si :
  1) $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$
  (les événements sont deux à deux incompatibles)
  2) $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$

Remarque

C'est une réécriture de la notion de partition avec le vocabulaire probabiliste. Une hypothèse diffère légèrement : dans le cas d'une partition, on suppose tous les A_i différents de $\varnothing$, ce qui n'est pas (toujours) exigé dans le cas d'un système complet d'événements.

Exemple

Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable fini avec $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

- $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
- $(\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\})$ est un système complet d'événements.

II. Espace probabilisé fini

II.1. Probabilité

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

Une probabilité est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que :

1) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$

2) $\boxed{P(\Omega) = 1}$
(la probabilité de l'événement sûr est 1)

3) Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tels que $\underline{A \cap B = \varnothing}$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) \ = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

(cette propriété est appelée additivité)

Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé fini.

Remarque

Nous avons déjà rencontré une application vérifiant la propriété d'additivité : le cardinal ! *(si $A \cap B = \varnothing$, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B$)*

En général, l'application Card n'est pas une application probabilité.
En effet, on a :

- si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, on a $\text{Card}(\Omega) = n$,
- ainsi : $\text{Card}(\Omega) = 1 \ \Leftrightarrow \ \Omega = \{\omega\}$.
  (Ω est réduit à un élément)

II.2. Propriétés des probabilités

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit A et B deux événements ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$).

Alors :

1) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

2) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3) $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

4) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Démonstration.

1) On a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ (réunion disjointe).
Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

2) On a : $(B \setminus A) \ \cup\ (A \cap B) = B$ (réunion disjointe).
Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}((B \setminus A) \ \cup\ (A \cap B)) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$$

3) D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.
Or, comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

4) On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point *2)* que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

Théorème 1. *Formule du crible (ou de Poincaré)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit A, B, C trois événements.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = &\ \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cup B \cup C) \\ &= \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & \quad - (\ \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))\ ) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & \quad -\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ & \quad +\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Encore une fois, c'est une conséquence directe de la propriété d'additivité. Ainsi, on obtient une formule analogue à celle du cours sur le cardinal. □

Remarque

On peut généraliser cette formule au cas d'une union d'un nombre fini m d'événements. La formule générale est donnée en copiant le schéma de celle énoncée dans le théorème :

× à chaque ligne on change de signe (on note positivement la première),

× à chaque ligne on considère des probabilités d'intersections regroupant un événement de plus.

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini ($\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$).

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_m$ des événements deux à deux incompatibles (i.e. $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$).

Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)}$$

On a notamment, pour tout événement A, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i \in [\![1,n]\!] \text{ tq } \omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$

Démonstration.
Conséquence de l'additivité ! □

Corollaire 1.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soient $(A_1, \dots, A_m)$ un système complet d'événements.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) = 1} \quad et \quad \forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B \cap A_i)}$$

Démonstration.
Conséquence du théorème 2 et de la définition de système complet d'événements. Il suffit de remarquer que :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i)$$

C'est une union d'événements incompatibles : en effet, si $i \neq j$,

$$\begin{aligned} (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) &= B \cap A_i \cap B \cap A_j = B \cap B \cap A_i \cap A_j \\ &= (B \cap B) \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \varnothing = \varnothing \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la propriété d'additivité. □

II.3. Le cas de l'équiprobabilité

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. On note $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

- On appelle probabilité uniforme la probabilité $\mathbb{P}$ vérifiant :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \dots = \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}}$$

- Lorsqu'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la probabilité uniforme, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Cette probabilité est généralement définie à l'aide de l'application Card comme le stipule l'énoncé suivant.

Théorème 3.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.

- *Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires.*
- *Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :*

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega} = \dfrac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}} \end{array}}$$

(le nombre de cas favorables est le nombre de cas réalisant A)

Démonstration.
Il suffit de vérifier les axiomes des probabilités.
L'additivité provient de l'additivité de l'application Card. □

Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement

Exemple
On peut reprendre les exemples du cours précédent.

1) On considère un jeu de 32 cartes.
L'expérience consiste à effectuer un tirage de 5 cartes.
L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Autrement dit Ω contient toutes les mains possibles.
Ainsi, $\text{Card}\,\Omega = \binom{32}{5}$.
Les tirages étant considérés comme équiprobables, l'univers Ω est muni de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage contenant un carré ?

Démonstration.
On note A l'événement : « le tirage obtenu contient un carré ».

- Le nombre de cas favorables est donné par $\text{Card}\,A = 8 \times 28$ (choix de la hauteur du carré et choix de la dernière carte).
- On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{8 \times 28}{\frac{32!}{5!\ 27!}} = \frac{8 \times \cancel{28}}{\frac{32\times31\times30\times29\times\cancel{28}}{5!}} \\ &= \frac{8 \times 5!}{32 \times 31 \times 30 \times 29} = \frac{\cancel{8} \times 5 \times \cancel{4} \times 3 \times 2}{\cancel{32} \times 31 \times 30 \times 29} \\ &= \frac{\cancel{5 \times 3 \times 2}}{31 \times \cancel{30} \times 29} = \frac{1}{31 \times 29}\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de A est de $\dfrac{1}{899} = 0,0011$. □

b. Et celle d'obtenir un tirage contenant exactement un pique ?

Démonstration.
On note B : « le tirage obtenu contient exactement un pique ».

- On a $\text{Card}\,B = 8 \times \binom{24}{4}$ (choix de la hauteur du pique et choix des 4 cartes restantes).
- Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{\text{Card}\,B}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{8 \times \frac{24!}{4!\ 20!}}{\frac{32!}{5!\ 27!}} = \frac{8 \times \frac{24\times23\times22\times21}{4!}}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5!}} \\ &= \frac{\cancel{8} \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times \cancel{5!}}{\cancel{32} \times 31 \times \cancel{30} \times 29 \times 28 \times 4!} = \frac{\cancel{24} \times 23 \times 22 \times 21}{31 \times 29 \times 28 \times \cancel{4!}} \\ &= \frac{23 \times 22 \times 21}{31 \times 29 \times 28} = \frac{23 \times 22 \times 3}{31 \times 29 \times 4} = \frac{23 \times 11 \times 3}{31 \times 29 \times 2}\end{aligned}$$

La probabilité de B est donc de $\dfrac{23 \times 11 \times 3}{31 \times 29 \times 2} \simeq 0,42$. □

2) On effectue 6 lancers d'un dé cubique équilibré.
L'univers est ici $\Omega = [\![1, 6]\!]^6$.
Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = 6^6$.
Il est muni de la probabilité uniforme (dé non truqué).

On considère les événements :
A : « On n'obtient aucun 6 lors des lancers »
B : « On obtient les 6 chiffres (dans un ordre quelconque) lors des lancers »
Calculer la probabilité de ces deux événements.

Démonstration.
On a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{5^6}{6^6} = \frac{15625}{46656} \simeq 0,33$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}\,B}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{A_6^6}{6^6} = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{3 \times 3 \times 6^2} = \frac{5}{324} \simeq 0,015$$

□

III. Probabilité conditionnelle

III.1. Définition

Théorème 4.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

On considère l'application $\mathbb{P}_A$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_A & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}} \end{array}$$

- *$\mathbb{P}_A$ est une probabilité, appelée* **probabilité conditionnelle** *relative à A.*
- *Pour tout événement B, $\mathbb{P}_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.*

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_A$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1) Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant 0$
- Comme $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$

2) $\mathbb{P}_A(\Omega) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \ = \ 1$

3) Soit C et D deux événements tels que $C \cap D = \varnothing$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A(C \cup D) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (C \cup D))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap C) \cup (A \cap D))}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap D) - \mathbb{P}((A \cap C) \cap (A \cap D))}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(A)} - \frac{\mathbb{P}(A \cap A \cap C \cap D)}{\mathbb{P}(A)} \end{aligned}$$

Comme $A \cap A \cap C \cap D = A \cap \varnothing = \varnothing$, on obtient :

$$\mathbb{P}_A(C \cup D) \ = \ \mathbb{P}_A(C) + \mathbb{P}_A(D)$$

□

Exemple
On considère le résultat d'un dé 6 équilibré. L'univers est donc $[\![1,6]\!]$ et est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
On considère les événements suivants.

- A : « on obtient un nombre inférieur ou égal à 3 »,
- B : « on obtient 5 »,
- C : « on obtient 2 ».

Calculer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_A(C)$.

Démonstration.

- Concernant $\mathbb{P}_A(B)$, deux manières de voir les choses.
  1) On peut tout d'abord réaliser le calcul :
  $$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = 0$$
  2) On peut aussi voir ce résultat comme suit.
  $\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé. Sachant que le résultat du tirage est inférieur à 3, il n'y a aucune chance pour que le résultat soit égal à 5.
- Concernant $\mathbb{P}_A(C)$, deux manières de voir les choses.
  1) On peut tout d'abord réaliser le calcul :
  $$\mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$
  2) On peut aussi voir ce résultat comme suit.
  Si A est réalisé, c'est que le résultat du lancer est un élément de $\{1,2,3\}$. Les résultats étant équiprobables, la probabilité de tirer 2 avec cet univers des possibles est $\dfrac{1}{3}$.

□

L'application $\mathbb{P}_A$ étant une probabilité, elle vérifie l'ensemble des propriétés listées au paragraphe II.2.

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Pour tout événement B et C, on a :

1) $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ donc $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$

2) $\mathbb{P}_A(B \setminus C) = \mathbb{P}_A(B) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$

3) Si $B \subset C$, $\mathbb{P}_A(B) \leqslant \mathbb{P}_A(C)$

4) $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$

III.2. Formules liées à la probabilité conditionnelle

III.2.a) Formule des probabilités composées

Théorème 5. *(Formule des probabilités composées au rang 2)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soient A et B deux événements.

1) si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut écrire $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$

2) si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A)}$

3) On a alors, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$$

Démonstration.
Sous réserve d'existence (*i.e.* $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$), on a :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Et comme $A \cap B = B \cap A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A)$. □

Théorème 6. *(Formule des probabilités composées)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille finie d'événements.

On suppose de plus que : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$.

On a alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ \dots\ \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)}$$

Démonstration.

- On note tout d'abord que, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$B_{m-1} = A_1 \cap \dots \cap A_{m-1} \ \subset\ A_1 \cap \dots \cap A_k = B_k$$

  On a donc $\mathbb{P}(B_k) \geqslant \mathbb{P}(B_{m-1}) > 0$ (car $\mathbb{P}(B_{m-1}) \neq 0$) et ainsi $\mathbb{P}(B_k) \neq 0$. On peut donc considérer $\mathbb{P}_{B_k}$ pout tout $k \in [\![1, m-1]\!]$.

- Démontrons par récurrence que : $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(m)$ où $\mathcal{P}(m)$: « toute famille $(A_1, \dots, A_m)$ telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$ vérifie : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$ »

  1. **Initialisation** :
  La propriété est vraie au rang 2, c'est le résultat du Théorème 5.
  Ainsi, $\mathcal{P}(2)$.

  2. **Hérédité** : soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
  Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$.
  On considère donc une famille $(A_1, \dots, A_{m+1})$ de $m+1$ événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) \neq 0$. Avec les notations précédentes :

$$A_1 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1} = B_m \cap A_{m+1}$$

  On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1}) = \mathbb{P}(B_m \cap A_{m+1}) = \mathbb{P}(B_m) \times \mathbb{P}_{B_m}(A_{m+1})$$

  (par application du Théorème 5 sachant que $\mathbb{P}(B_m) \neq 0$)

Or, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathbb{P}(B_m) = \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{m-1}}(A_m)$$

Ce qui démontre $\mathcal{P}(m+1)$ en réinjectant dans l'identité précédente.

Par principe de récurrence, on a donc : $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\mathcal{P}(m)$. □

Exemple

Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires.
L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules.

1) Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?

Démonstration.

- On note B_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche ».
- On note N_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche ».

Sous réserve que l'on puisse écrire chacun des éléments, la formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ \mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)$$

On a : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{5}{13}$ $(\neq 0)$.

Le terme $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$ représente la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{4}{12}$.

On a alors :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{5\times 4}{13\times 12} \neq 0$$

et on peut calculer $\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)$, la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant 3 blanches et 8 noires. D'où $\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) = \dfrac{3}{11}$.

On a donc :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5\times \cancel{4}\times \cancel{3}}{13\times \cancel{12}\times 11} = \frac{5}{11\times 13} \simeq 0,035$$ □

2) Quelle est la probabilité qu'une boule noire apparaisse pour la première fois au deuxième tirage ?

Démonstration.

Avec les mêmes notations, et sous réserve que l'on puisse écrire chacun des termes, on a :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(N_2)$$

Le terme $\mathbb{P}_{B_1}(N_2)$ représente la probabilité de tirer une boule noire dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \dfrac{8}{12}$.

On a donc :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{5\times 8}{13\times 12} = \frac{5\times 2}{13\times 3} = \frac{10}{39} \simeq 0,256$$ □

III.2.b) Formule des probabilités totales

Théorème 7. *(Formule des probabilités totales)*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(A_1, \ldots, A_m)$ un système complet d'événements.

On suppose de plus que : $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$.

Pour tout événement B, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i \cap B) \ = \ \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

Démonstration.

- La première partie est une redite du corollaire 1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B\cap\Omega) = \mathbb{P}(B \cap (\bigcup_{i=1}^{m} A_i)) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{m} (B\cap A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i \cap B)\end{aligned}$$

- On conclut à l'aide de la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$ □

Cas particulier du système complet $(A, \overline{A})$

- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit A un événement.
- La famille $(A, \overline{A})$ est alors un système complet d'événements fini.
- Supposons de plus que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) \neq 0$.

Alors, pour tout événement B, on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \; = \; \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B) \; + \; \mathbb{P}(\overline{A})\ \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}$$

Exemple
On reprend l'exemple précédent.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage ?

La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements $(\overline{B_1} = N_1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2) &= \mathbb{P}(B_1)\ \ \mathbb{P}_{B_1}(N_2) \ + \ \mathbb{P}(N_1)\ \ \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{5}{13}\quad \frac{8}{12} \quad + \quad \frac{8}{13} \quad \frac{7}{12} \\ &= \frac{5\times 2 + 2\times 7}{3\times 13} = \frac{24}{3\times 13} = \frac{8}{13}\end{aligned}$$

2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?

La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements $(\overline{B_1} = N_1)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1)\ \ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \ + \ \mathbb{P}(N_1)\ \ \mathbb{P}_{N_1}(B_2) \\ &= \frac{5}{13}\quad \frac{4}{12} \quad + \quad \frac{8}{13} \quad \frac{5}{12} \\ &= \frac{5\times 1 + 2\times 5}{3\times 13} = \frac{15}{3\times 13} = \frac{5}{13}\end{aligned}$$

Cette démonstration est juste mais témoigne d'un manque de recul.
En effet, $B_2 = \overline{N_2}$. On a donc directement : $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\overline{N_2}) = 1 - \mathbb{P}(B_2)$.

Remarque
L'idée derrière la formule des probabilités totales est celle de l'étude de cas. Dans l'exemple précédent, on **teste** l'événement N_2 selon les deux cas possibles au premier tirage : soit on a obtenu une boule noire, soit on a obtenu une boule blanche.

- L'étude de cas se doit d'être exhaustive *i.e.* inclure tous les cas possibles.

  $\hookrightarrow$ ceci est assuré par le fait que la réunion de tous les événements d'un SCE forme Ω, univers des possibles.
- Chaque cas n'empiète sur aucun autre.

  $\hookrightarrow$ ceci est assuré par le fait que les événements d'un SCE sont 2 à 2 incompatibles.

III.2.c) Formule de Bayes

Théorème 8. *Formule de Bayes*
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $m \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(A_1, \dots, A_m)$ un système complet d'événements.
On suppose de plus que : $\forall k \in [\![1, m]\!],\ \mathbb{P}(A_k) \neq 0$.
Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A_j) \; = \; \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\mathbb{P}(B)} \; = \; \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)}}$$

Démonstration.

- La première égalité s'obtient par définition de $\mathbb{P}_B$ et à l'aide de la formule des probabilités composées (au rang 2) :

$$\mathbb{P}_B(A_j) \; = \; \frac{\mathbb{P}(B \cap A_j)}{\mathbb{P}(B)} \; = \; \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \; = \; \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- La seconde égalité est l'écriture de $\mathbb{P}(B)$ à l'aide de la formule des probabilités totales. $\square$

Cas particulier du système complet $(A, \overline{A})$

- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit A un événement.
- La famille $(A, \overline{A})$ est alors un système complet d'événements fini.
- Supposons de plus que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) \neq 0$.

Alors, pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)\ +\ \mathbb{P}(\overline{A})\ \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}}$$

Exemple
On considère de nouveau l'urne précédente.
Le second tirage ayant donné une boule blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

Démonstration.
La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements ($\overline{B_1} = N_1$).

$$\mathbb{P}_{B_2}(B_1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)}{\mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ +\ \mathbb{P}(N_1)\ \mathbb{P}_{N_1}(B_2)}$$

$$= \frac{\frac{5}{13} \times \frac{4}{12}}{\frac{5}{13} \times \frac{4}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{5}{12}} \;=\; \frac{5}{\cancel{13 \times 3}} \times \frac{\cancel{13 \times 3}}{5 + 10} \;=\; \frac{5}{15} \;=\; \frac{1}{3}$$ □

Formule des causes
La formule de Bayes est connue aussi sous le nom de « formule des causes ».

- Si l'on reprend l'exemple précédent, l'événement B_2 est postérieur à l'événement B_1. On cherche à connaître la probabilité de B_1 qui est une cause possible de l'événement B_2 sachant que la conséquence B_2 a été réalisée.
- Cette formule peut donc paraître étonnante puisqu'elle ne suit pas l'ordre chronologique.

Exercice
On considère une population touchée par une maladie rare touchant une personne sur 10000.
Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

× si une personne est malade, le test est positif à 99%,

× si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

A-t-on intérêt à se fier aux résultats de ce test ?
Plus précisément, on calculera la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

Démonstration.
Ce type d'exercice, très classique, suit le schéma suivant.

1) Nommage des événements
- On note M l'événement : « la personne est malade ».
- On note T l'événement : « le test est positif ».

2) Récupération des données de l'énoncé
D'après l'énoncé, on a : $\mathbb{P}(M) = \frac{1}{10000}$ et $\mathbb{P}_M(T) = \frac{99}{100}$ et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = \frac{0,1}{100}$.

3) Annonce de l'hypothèse
La famille $(M, \overline{M})$ forme un système complet d'événements.

4) Conclusion à l'aide de la formule du cours
La formule de Bayes donne :

$$\mathbb{P}_T(M) \;=\; \frac{\mathbb{P}(M)\ \mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(T)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(M)\ \mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(M)\ \mathbb{P}_M(T)\ +\ \mathbb{P}(\overline{M})\ \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10000} \times \frac{99}{100}}{\frac{1}{10000} \times \frac{99}{100} + \frac{9999}{10000} \times \frac{0,1}{100}} \;=\; \frac{99}{\cancel{10000 \times 100}} \times \frac{\cancel{10000 \times 100}}{99 + 999,9}$$

$$= \frac{99}{1098,9} \leqslant \frac{99}{1000} \;=\; 9,9\%$$

Ainsi, moins de 10% des personnes positives au test sont réellement atteintes par la maladie. Il ne faut donc pas se fier à ce test. □

IV. Indépendance en probabilité

IV.1. Indépendance de deux événements

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Les événements A et B sont dits **indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

Théorème 9.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soient A et B deux événements.

1) *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors on a :*

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants pour } \mathbb{P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)}$$

2) *Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors on a :*

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants pour } \mathbb{P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)}$$

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé 6 :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- On note A : « le résultat obtenu est inférieur à deux »
- On note B : « le résultat obtenu est supérieur à quatre »

On cherche à déterminer si A et B sont indépendants suivant deux probabilités différentes.

Cas 1 : dé équilibré

L'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est donc muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}^1$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) = \ldots = \mathbb{P}^1(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

On a $\mathbb{P}^1(A) = \dfrac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \neq 0$.

- On peut donc calculer ${\mathbb{P}^1}_A(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2. On a donc ${\mathbb{P}^1}_A(B) = 0$.
- Or $\mathbb{P}^1(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \neq {\mathbb{P}^1}_A(B)$.

Ainsi, les événements A et B sont « dépendants » pour la probabilité $\mathbb{P}^1$.

Cas 2 : dé pipé

Le dé considéré permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1.
Autrement dit, l'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}^2$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^2(\{1\}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^2(\{2\}) = \ldots = \mathbb{P}^2(\{6\}) = 0$$

- On a $\mathbb{P}^2(A) = 1$, on peut donc calculer ${\mathbb{P}^2}_A(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2.
  On a donc encore ${\mathbb{P}^2}_A(B) = 0$.
- Or, étant donné le dé considéré, la probabilité d'obtenir un résultat supérieur 4 est $\mathbb{P}^2(B) = 0 = {\mathbb{P}^2}_A(B)$.

Ainsi, les événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^2$.

> La notion d'indépendance dépend fortement de la probabilité choisie. Autrement dit, deux événements peuvent être « dépendants » pour une probabilité et indépendants pour une autre.

Remarque
Considérons $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

- Il ne faut surtout pas confondre :
  1) A et B sont incompatibles : notion intrinsèque aux événements,
  (ne dépend d'aucune probabilité $\mathbb{P}$!)
  2) A et B sont indépendants : notion qui dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ choisie.
- Plus précisément on a :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ incompatibles} \quad \not\Rightarrow \quad A \text{ et } B \text{ indépendants (pour } \mathbb{P})}$$

L'exemple précédent est une illustration de cette propriété puisque A et B sont incompatibles mais non indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^1$.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ incompatibles} \quad \not\Leftarrow \quad A \text{ et } B \text{ indépendants (pour } \mathbb{P})}$$

Illustrons cette propriété dans l'exemple suivant.

Exemple
On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6.
On note A : « le premier chiffre est pair ».
On note B : « le second chiffre est impair ».
L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
Le dé est supposé équilibré : on munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
Démontrons que A, B sont indépendants.

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times \cancel{6}}{6 \times \cancel{6}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
  De même : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times \cancel{6}}{6 \times \cancel{6}} = \dfrac{1}{2}$.
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

En effet : $A \cap B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$.
On en déduit au passage que A et B ne sont pas incompatibles.

Exercice
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
On munit Ω de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. Démontrer que :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \\ A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ ne sont pas} \\ \text{indépendants pour } \mathbb{P} \end{array}$$

> Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, deux événements incompatibles et tous deux différents de $\varnothing$ ne sont jamais indépendants.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que :

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega} \neq 0 \quad$ et $\quad \mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}\, B}{\text{Card}\, \Omega} \neq 0$.

Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. □

Exercice
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0 \ \Rightarrow \ \forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A \text{ et } B \text{ sont indépendants } \mathbb{P}}$$

Démonstration.
En effet, on a $A \cap B \subset A$.
On en déduit donc que : $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) = 0$.
Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
Ce qui démontre que A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$. □

Proposition 1.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini.*

Soient A *et* B *deux événements indépendants.*

1) *Les événements* A *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

2) *Les événements* $\overline{A}$ *et* B *sont indépendants.*

3) *Les événements* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

Démonstration.

1) Démontrons que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) & = & \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ & = & \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\ & = & \mathbb{P}(A)\,(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{B}) \end{array}$$

2) Supposons A et B indépendants.
On a évidemment B et A indépendants.
Ainsi, par la propriété ***1)***, on obtient que B et $\overline{A}$ sont indépendants.

3) Supposons A et B indépendants.
Par la propriété ***1)***, on a : A et $\overline{B}$ indépendants.
Par la propriété ***2)***, on a : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.

□

IV.2. Indépendance mutuelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, \ldots, A_m)$ une famille d'événements.

1) $A_1, \ldots, A_m$ sont deux à deux indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2, \quad \boxed{i \neq j \ \Rightarrow\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \ = \ \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}(A_j)}$$

2) $A_1, \ldots, A_m$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ si :

$$\forall I \subset [\![1,m]\!], \quad \boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \ = \ \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)}$$

Pour bien comprendre la différence entre ces deux notions, intéressons-nous à ce qu'elles signifient pour une petite valeur de m.

Cas particulier : $m = 3$

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1) Les événements A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants si :

- ***a)*** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2)$
- ***b)*** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_3)$
- ***c)*** $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}(A_3)$

2) Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si :

- ***a)*** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2)$
- ***b)*** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_3)$
- ***c)*** $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}(A_3)$
- ***d)*** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}(A_3)$

Remarque

Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse.
(*on aurait sinon deux noms différents pour la même notion !*)

$$\boxed{\text{indépendance mutuelle} \quad \Rightarrow \quad \text{indépendance 2 à 2}}$$

$$\boxed{\text{indépendance mutuelle} \quad \not\Leftarrow \quad \text{indépendance 2 à 2}}$$

Exemple

On considère de nouveau l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6. On rappelle et complète la liste des événements considérés.

On note A : « le premier chiffre est pair ».

On note B : « le second chiffre est impair ».

On note C : « la somme des chiffres est paire ».

1) Démontrons que A, B et C sont deux à deux indépendants.

- On a déjà démontré que A et B sont indépendants.
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{\text{Card}(A \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{\text{Card}(B \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
- La famille $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements.
  Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{P}(C) & = & \mathbb{P}(A \cap C) & + & \mathbb{P}(\overline{A} \cap C) & & \\ & = & \dfrac{1}{4} & + & \dfrac{1}{4} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

- On a alors : $\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$
- On a alors : $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$

2) Démontrons que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

- On a $A \cap B \cap C = \varnothing$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Or $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Théorème 10.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille d'événements.

Notons $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.
(autrement dit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$).

1) Si $A_1, \dots, A_m$ sont deux à deux indépendants, alors $B_1, \dots, B_m$ sont deux à deux indépendants.

2) Si $A_1, \dots, A_m$ sont mutuellement indépendants, alors $B_1, \dots, B_m$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration.

1) C'est un corollaire direct de la Proposition 1.

2) On commence par démontrer que si $A_1, \dots, A_m$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour $A_1, \dots, A_{k-1}, \overline{A_k}, A_{k+1}, \dots, A_m$ où $k \in [\![1, m]\!]$. Pour ce faire, on prend $I \subset [\![1, m]\!]$ et on distingue :

- le cas où $k \notin I$ (facile !),
- le cas où $k \in I$ (plus technique).

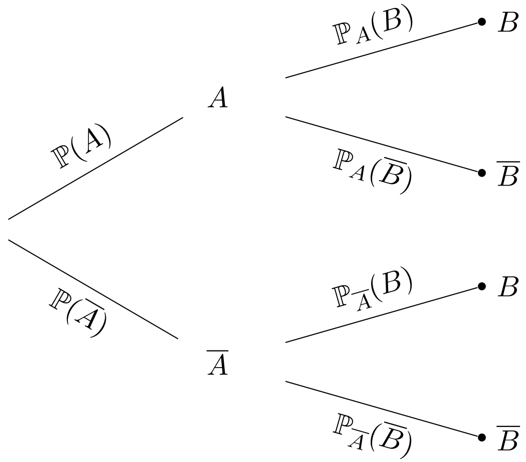
contraires apparaissant dans la famille $(B_1, \dots, B_m)$. □

Exercice

Soient A, B et C des événements mutuellement indépendants.
Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.

BONUS : probabilités conditionnelles et arbres de probabilité

Au lycée, l'étude des probabilités est très souvent abordée à l'aide d'**arbres de probabilités** qui permettent de représenter les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire.



On a représenté ici un arbre à 2 niveaux. À chaque niveau, une alternative est proposée qui traduit la présence d'un système complets d'événements : $(A, \overline{A})$ au 1$^{\text{er}}$ niveau et $(B, \overline{B})$ au 2$^{\text{ème}}$ niveau.

Selon l'expérience aléatoire considérée, l'arbre peut présenter plus de 2 niveaux et chaque niveau peut proposer de plus de 2 choix (formé d'un système complet à trois événements (A_1, A_2, A_3) par exemple).

> Cette représentation est très marquée lycée. Au concours, on l'utilisera de préférence au brouillon. Il faut avoir en tête que le correcteur vérifiera que la rédaction contient :
>
> × l'hypothèse « système complet d'événements »,
>
> × le nom des théorèmes utilisés.
> *(formule des probabilités composées / totales)*

La lecture des probabilités se fait alors comme suit.

1) La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1} \qquad \boxed{\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1}$$

2) La probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées sur ce chemin.

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)} \qquad \boxed{\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A})\ \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}$$

(formule des probabilités composées)

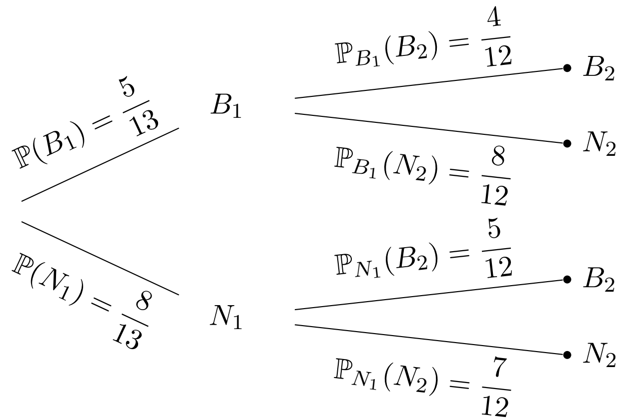
3) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

$\mathbb{P}(B)$	$=$	$\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)$	$+$	$\mathbb{P}(\overline{A})\ \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$
$\mathbb{P}(\overline{B})$	$=$	$\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(\overline{B})$	$+$	$\mathbb{P}(\overline{A})\ \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$

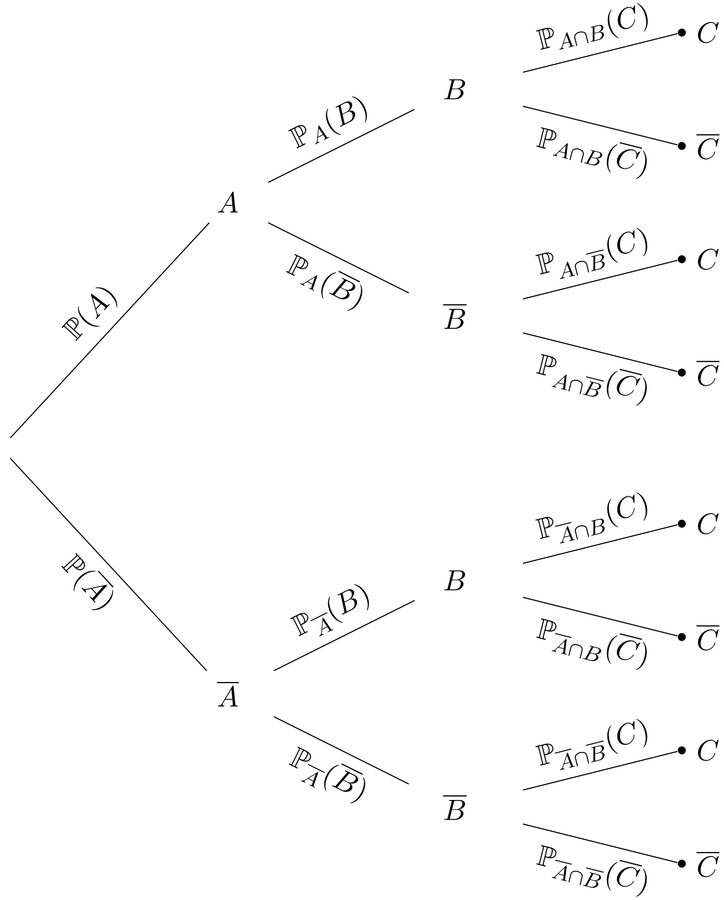
(formule des probabilités totales)

Exemple

Deux tirages consécutifs dans une urne contenant 8 boules noires et 5 blanches.
B_i : « le résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage est une boule blanche »
N_i : « le résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage est une boule noire »



BONUS (bis) : arbre à 3 niveaux



1) La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) \ = \ 1} \qquad \boxed{\mathbb{P}_{\overline{A}\cap B}(C) + \mathbb{P}_{\overline{A}\cap B}(\overline{C}) \ = \ 1}$$

2) La probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées sur ce chemin.

$$\boxed{\mathbb{P}(A\cap B\cap C) \ = \ \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)\ \mathbb{P}_{A\cap B}(C)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{A}\cap B\cap \overline{C}) \ = \ \mathbb{P}(\overline{A})\ \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\ \mathbb{P}_{\overline{A}\cap B}(\overline{C})}$$

(formule des probabilités composées)

3) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(C) & = & \mathbb{P}(A\cap B)\ \mathbb{P}_{A\cap B}(C) \ + \ \mathbb{P}(A\cap \overline{B})\ \mathbb{P}_{A\cap \overline{B}}(C) \\ & & + \ \mathbb{P}(\overline{A}\cap B)\ \mathbb{P}_{\overline{A}\cap B}(C) \ + \ \mathbb{P}(\overline{A}\cap \overline{B})\ \mathbb{P}_{\overline{A}\cap \overline{B}}(C) \end{array}}$$

(formule des probabilités totales)

On peut alors compléter cette formule à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A\cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(\overline{B}) \ldots$$

Exercice
Montrer que la famille $(A\cap B, A\cap \overline{B}, \overline{A}\cap B, \overline{A}\cap \overline{B})$ est un système complet d'événements.

(ainsi la formule précédente donnant $\mathbb{P}(C)$ est bien une application de la formule des probabilités totales !)