

## Feuille d'exercices n°9 : Probabilités sur un univers fini

### Cas de l'équiprobabilité

#### Exercice 1. (☆)

On joue à pile ou face quatre fois de suite.

- On note  $A$  l'événement : « on obtient deux fois pile et deux fois face »
  - On note  $B$  l'événement : « les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ».
- a.* Décrire l'univers  $\Omega$  et l'ensemble des événements  $\mathcal{P}(\Omega)$ .  
On calculera notamment le cardinal de  $\mathcal{P}(\Omega)$ .
  - b.* Calculer  $\mathbb{P}(A)$ ,  $\mathbb{P}(B)$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B)$  et  $\mathbb{P}(A \cup B)$ .

#### Exercice 2. (★★)

Un tiroir contient 10 paires de chaussettes toutes différentes.  
On pioche au hasard 4 chaussettes.

- a.* Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une paire complète ?
- b.* Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires ?

#### Exercice 3. (☆)

On lance 7 fois de suite un même dé à 20 faces.

- a.* Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros distincts à chaque lancer ?
- b.* Quelle est la probabilité d'obtenir toujours le même numéro ?

#### Exercice 4. (★)

Un tiroir contient 12 paires de chaussettes et 2 paires de gants. Les doigts engourdis par le froid et la vision obscurcie par le sommeil, on pioche  $n$  objets dans le tiroir.

- a.* Que doit valoir  $n$  au minimum pour avoir une probabilité non nulle d'obtenir une paire de chaussettes complète et une paire de gants complète ?
- b.* Même question pour une probabilité égale à 1.
- c.* Et que doit valoir  $n$  au minimum pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à  $1/2$  ?

#### Exercice 5. (★★★)

On place au hasard cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables.

- a.* Combien y a-t-il de rangements possibles ?
- b.* Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même boîte ?
- c.* Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?
- d.* Quelle est la probabilité qu'une boîte exactement soit vide ?
- e.* En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.
- f.* Retrouver ce résultat avec la formule du crible.

#### Exercice 6. (★★★)

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8.  
On tire trois fois de suite une boule avec remise.

- a.* Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre strictement croissant ?
- b.* Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre croissant ?

## Probabilité conditionnelle

### Exercice 7. (★)

Dans une urne se trouvent quatre boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement et sans remise une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné. Quelle est la probabilité de victoire de chacune des cinq personnes ?

## Système complet d'événements

### Exercice 8. (☆)

On considère un jeu de fléchettes sur une cible comportant 3 zones :  $Z_1$ ,  $Z_2$  et  $Z_3$ . On lance une fléchette sur la cible. Pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ , on considère les événements  $A_k = \ll \text{la fléchette atteint la zone } Z_k \gg$ .

Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité définie sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  telle qu'il existe un réel  $c$  vérifiant, pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathbb{P}(A_k) = ck$ .

- Décrire l'univers associé à cette expérience.
- Montrer que  $(A_1, A_2, A_3)$  forme un système complet d'événements.
- Déterminer l'unique valeur possible pour  $c$ .

## Formule des probabilités composées

### Exercice 9. (★★)

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir.

Quelle est la probabilité que la première tentative réussie soit la  $k^{\text{ème}}$  ? On répondra à cette question sous chacune des trois hypothèses suivantes.

- $(H_1)$  le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,
- $(H_2)$  le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,
- $(H_3)$  le rat se souvient des deux expériences précédentes.

### Exercice 10. (★)

Une urne contient 10 boules blanches, 4 boules rouges et 6 boules noires.

- On tire 3 boules avec remise. Quelle est la probabilité que le tirage soit tricolore ? bicolore ? unicolore ?
- On tire 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité que le tirage soit tricolore ? bicolore ? unicolore ?

## Formule des probabilités totales

### Exercice 11. (★★)

On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ . Dans l'urne numéro  $k$  se trouvent  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire deux boules dans cette urne.

- Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
- Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.
- Quelle est la limite de ces probabilités quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

## Formule des probabilités totales / formule de Bayes

### Exercice 12. (★)

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe  $R_1$ , 50% pour la classe  $R_2$ , et 30% pour la classe  $R_3$ . Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

- Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
- Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

**Exercice 13. (★)**

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires : avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

- Quel est le taux global de personnes soulagées ?
- Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

**Exercice 14. (★)**

Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées. Calculer la probabilité pour que :

- La pièce testée soit refusée à tort.
- La pièce testée soit acceptée.
- Le contrôle commette une erreur.
- Une pièce qui a été acceptée soit en fait défectueuse.

**Exercice 15. (★)**

Les ampoules de la marque  $X$  sont fabriquées dans deux usines, A et B. 20% des ampoules de l'usine A et 5% de l'usine B sont défectueuses. Chaque semaine l'usine A produit  $2n$  ampoules et l'usine B produit  $n$  ampoules (où  $n$  est un entier). On tire une ampoule au hasard dans la production d'une semaine.

- Quelle est la probabilité que l'ampoule tirée ne soit pas défectueuse ?
- Si l'ampoule tirée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine A ?

**Exercice 16. (★)**

On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%,
- si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de 0,1% (on parle de *faux positif*).

A-t-on intérêt à se fier aux résultats de ce test ?

Plus précisément, on calculera la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif.

**Indépendance**

Pour les exercices 17 et 18, on considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ .

**Exercice 17. (☆)**

Existe-t-il deux événements  $A$  et  $B$  à la fois incompatibles et indépendants ?

**Exercice 18. (★)**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des événements mutuellement indépendants.

Montrer que  $A$  et  $B \cup C$  sont indépendants.

**Exercice 19. (★)**

Une urne contient deux boules vertes et trois boules jaunes. On effectue quatre tirages avec remise dans cette urne. On considère les événements suivants :

$A$  = « les deux premiers tirages donnent des boules vertes »

$B$  = « les deux derniers tirages donnent des boules vertes »

$C$  = « les deuxième et troisième tirages donnent des boules jaunes »

$D$  = « les quatre tirages donnent des boules de la même couleur »

- Parmi ces événements, dire lesquels sont indépendants.
- Ces quatre événements sont-ils mutuellement indépendants ?

**Exercice 20. (★)**

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6.

- On note  $A$  : « le premier chiffre est pair ».
  - On note  $B$  : « le second chiffre est impair ».
  - On note  $C$  : « la somme des chiffres est paire ».
- a. Démontrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont deux à deux indépendants.
  - b. Démontrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas mutuellement indépendants.

**Exercice 21 (★)**

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0,52. Par ailleurs, on sait que 2% des filles et 1% des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

- a. On note  $F$  l'événement « naissance d'une fille » et  $L$  l'événement « avoir une luxation de la hanche ». Les événements  $F$  et  $L$  sont-ils indépendants ?
- b. Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille ?

**Exercice 22. (★)**

On dispose de 3 composants électriques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  dont la probabilité de fonctionnement est  $p_i$ . Le fonctionnement d'un composant est supposé totalement indépendant des autres.

Donner la probabilité de fonctionnement du circuit dans les cas suivants :

- a. si les composants sont disposés en série,
- b. si les composants sont disposés en parallèle,
- c. si le circuit est mixte :  $C_1$  est disposé en série avec le sous-circuit constitué de  $C_2$  et  $C_3$  en parallèle.

**Évolution d'une grandeur aléatoire dans le temps (discret)****Exercice 23. (★★)**

Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, le lendemain il reste motivé et ne fume qu'avec une probabilité de  $1/4$ . Par contre s'il fume un jour, le lendemain il fume avec une probabilité notée  $\alpha$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $p_n$  la probabilité qu'il fume le  $n^{\text{ème}}$  jour.

- a. Exprimer  $p_n$  en fonction de  $p_{n-1}$  et  $\alpha$ .
- b. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)^n p_0 + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)^k$
- c. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .
- d. Cette limite peut-elle être nulle ?  
Dans la négative, donnez-en une borne inférieure.  
Cette stratégie vous paraît-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

**Exercice 24. (★★)**

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité  $p$ , c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité  $1-p$ , c'est l'information contraire qui est transmise. On note  $p_n$  la probabilité que l'information après  $n$  transmissions soit correcte.

- a. Donner une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ .
- b. En déduire la valeur de  $p_n$  en fonction de  $p$  et de  $n$ .
- c. En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Qu'en pensez-vous ?

**Exercice 25. (★★)**

Deux joueurs  $A$  et  $B$  jouent aux échecs sans discontinuer. Le joueur  $B$  gagne la première partie. La probabilité que  $A$  remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de  $0,6$ . La probabilité que  $B$  remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de  $0,5$ . On note  $p_n$  la probabilité que  $B$  remporte la  $n^{\text{ème}}$  partie.

Montrer que  $(p_n)$  est arithmético-géométrique et donner sa formule explicite.