Feuille d'exercices vacances de la Toussaint : Calcul, révisions, informatique

I. Entraînement au calcul

Exercice 1. (★)
Développer et simplifier :

a. $(x+2)^3-(x-2)^3$

b. $\left(\mathrm{e}^2+\sqrt{2}\right)^2$

c. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$

d. $(x^2+1)^4+(x^2-1)^4$

e. $\left(x+1+\sqrt{2}\right)\left(x+1-\sqrt{2}\right)-(x+1)^2$

f. $\left(3+2\sqrt{x}\right)^2+\left(6-\sqrt{x}\right)^2$

Exercice 2. (★)
Simplifier en utilisant l'expression conjuguée :

a. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

b. $\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}$

c. $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

d. $\dfrac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2}$

e. $\left(\sqrt{5}-2\right)^{-1}$

f. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

g. $\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{7}-\sqrt{11}}$

Exercice 3. (★)
Simplifier les expressions suivantes :

a. $\dfrac{7x+5}{8}-\dfrac{3-2x}{12}$

b. $\dfrac{\dfrac{7}{5}+\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{7}-\dfrac{3}{x}}$

c. $\dfrac{3x^2+x+1}{x-1}-\dfrac{2x+9}{x+1}$

d. $\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-\ln(1+x)+2\ln(x)$

e. 1001^2-999^2

f. $\dfrac{x-\dfrac{x-2}{x+2}}{\dfrac{3-2x}{x-1}+3}$

g. $\dfrac{(3\sqrt{x})^{2x}}{x^{x-1}\times\dfrac{1}{x^{-1}}}$

h. $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}$

Exercice 4. (★)
Pour chaque question, indiquer si le parenthésage est correct, et si non, ce qui ne va pas :

a. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2+1}$

b. $\mathrm{e}^{x^3}+\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$

c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k+1=(n+1)^2$

d. $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} k=2n!$

e. $(2x-6)(x+2)-(x+1)(x-3)+2x(3-x))$

f. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(q^k)=\frac{q}{(q-1)^2}\left(nq^{(n+1)}-n+1q^n+1\right)$

g. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}\ -\ \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$

II. Exercices de révision

Étude de fonctions

Exercice 5. (★)

a. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété :
« La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante ».

b. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété :
« La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée ».

c. Écrire la négation des deux propriétés précédentes.

Exercice 6. (★★)

a. Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = \ln(\sqrt{x} - 3)$.

b. Faire l'étude complète de la fonction $g(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$.

Exercice 7. (★★)

Pour chacune des fonctions suivantes :

× déterminer le domaine de définition,

× calculer la dérivée.
(on précisera auparavant l'ensemble E où ce calcul est valide)

a. $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$

b. $f(x) = \ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right)$

c. $f(x) = x^{1/x}$

d. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

e. $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + \mathrm{e}^x} - x$

f. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2 - 1}$

Exercice 8 (★★)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

a. Faire l'étude de la fonction f.

b. Soit $y \in \mathbb{R}$. Discuter du nombre d'antécédents de y par f.

Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 9. (★★)

a. Résoudre l'équation : $|x^2 + 4x - 5| = \sqrt{x^4 + 9x^3 + 19x^2 - 9x - 20}$

b. Résoudre l'équation : $\sqrt{11x + 1} = x + 2$.

c. Résoudre l'équation : $|2x + 3| = 1 + |3x + 2|$.

d. Résoudre l'inéquation : $-4 \leqslant \sqrt{\ln(x) + 3}$

e. Résoudre l'inéquation : $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 \geqslant 0$.

Sommes et produits finis

Exercice 10. (★★)

On définit la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n-2} (i + 1) \times \mathrm{e}^i$ (pour $n \geqslant 3$).

On définit la fonction $f_n : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum\limits_{i=2}^{n-1} x^i$.

a. Calculer f_n', la dérivée de la fonction f_n par rapport à la variable x.
En déduire une relation entre u_n et f_n'.

b. En reconnaissant une somme classique, simplifier l'expression de $f_n(x)$.

c. Calculer f_n' à l'aide du résultat de la question précédente.

d. En déduire la valeur de u_n.

e. **Application :** calculer la somme $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \mathrm{e}^i$ pour $n \geqslant 3$.

Exercice 11. (★)

Simplifier la somme $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(\dfrac{k^2 - 1}{k^2}\right)$.

Exercice 12. (★)
Calculer les sommes, sommes doubles et produits suivants :

a. $\sum_{i=1}^{n} 3^{2n-1}$

b. $\sum_{k=2}^{n} \left(k^3 - 2k^2 - 3k + 1\right)$

c. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \mathrm{e}^{i+j}$

d. $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-k}$

e. $\prod_{k=1}^{n} \frac{3}{k}$

Exercice 13. (★)
Dans cet exercice, on se propose de déterminer la formule donnant les n premiers carrés d'entiers par une méthode autre que celle vue en cours.
Dans la suite, on notera $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

a. Soit $j \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme des j premiers entiers pairs ?

b. Exprimer S_{2j} en fonction de la somme des j premiers entiers pairs et de la somme des j premiers entiers impairs. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{j} (2k-1)$.

c. Déduire de la question précédente la formule suivante.

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} (2k-1) \right)$$

(on pourra penser à une formule d'interversion des symboles sommes)

d. En remarquant que $2k-1$ est indépendant de l'indice de sommation j, donner la valeur de $\sum_{j=k}^{n} (2k-1)$.

e. Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} (2k-1) \right) = S_n(2n+3) - 2T_n - n(n+1)$

f. En déduire la valeur de T_n.

Étude de suites

Exercice 14. (★)
Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^{n+2}}{n!}$.
Cette suite est-elle bornée ?

Exercice 15. (★★)
Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$.
Cette suite est-elle bornée ?

Étude de suites classiques

Exercice 16. (★)
Donner une formule explicite pour les suites suivantes :

a. $u_0 = 1\,;\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 7$

b. $u_0 = 2\,;\ u_1 = 0\,;\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$

c. $u_0 = -1\,;\ u_1 = 1\,;\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$

d. $u_0 = 0\,;\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 - 2u_n$

e. $u_0 = 0\,;\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2}\ u_n + 1$

f. $u_0 = u_1 = 1\,;\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{3u_{n+1} + u_n}{4}$

g. $u_0 = 2\,;\ u_1 = \ln 2\,;\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ 12u_{n+2} = 17u_{n+1} - 6u_n$.

Exercice 17. (★★)
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $v_0 = \dfrac{1}{4}$, et la relation de récurrence, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{2v_n}{(n+3)v_n + 1}$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est à termes strictement positifs.

b. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{v_n}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

c. Déterminer les réels a et b tels que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$w_n = u_n + a \times n + b$$

soit géométrique.

d. Donner une formule explicite pour w_n, puis u_n et v_n.

Exercice 18. (★★)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)} u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

a. Démontrer que cette suite est majorée par 3.

b. Démontrer que cette suite est monotone.

c. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = n(3 - u_n)$.
Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

d. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

e. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$.

Suites implicites

Exercice 19. (★★★)
On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction f par : $f(x) = x + \ln x$.

a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
On la note u_n.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 20. (★★★)
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$.

a. Faire l'étude de la fonction f_n.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

III. Informatique

On écrira d'abord les réponses sur papier, sans ordinateur.
On entrera ensuite les réponses dans Scilab pour voir si ça marche.

Exercice 21. (★)
Écrire un programme qui demande deux nombres à l'utilisateur (entrés au clavier), puis affiche leur moyenne, avec un gentil message.

Exercice 22. (★)
Définir la fonction `f` telle que $f(x) = \ln(1 + |x|) + 3e^{x+\pi}$.