Feuille d'exercices vacances de la Toussaint : Calcul, révisions, informatique

II. Exercices de révision

Étude de fonctions

Exercice 6

a. Attention à l'ensemble de définition.
La quantité $\ln(\sqrt{x}-3)$ est définie si $\sqrt{x}-3\ldots$

b. Attention à l'ensemble de définition. Il y a en effet plusieurs contraintes.
Déjà, on doit pouvoir écrire $\ln(x)$. Ensuite, on doit pouvoir écrire $\sqrt{\ln(x)}$.
Enfin, on doit pouvoir écrire $\dfrac{1}{x}$. À rédiger !

Exercice 7

Plusieurs remarques sur cet exercice.

1) Il ne faut pas confondre :
- × domaine de définition (noté $\mathscr{D}_f$),
- × et domaine de dérivabilité (notons-le E_f).

2) Il ne faut pas confondre :
- × domaine de dérivabilité de f (notons-le E_f),
- × et domaine de définition de f' (noté $\mathscr{D}_{f'}$).

De manière générale, on a : $E_f = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_{f'}$.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est :
- × définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ ($\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$),
- × dérivable sur son domaine de définition ($E_f = \mathbb{R}^{+*}$),
- × de dérivée la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$ ($\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$).

a. Dérivée de $\ln(u)$.

b. Dérivée de $\ln(u)$.

c. Définition de $x^{1/x}$ ($1/x$ est une puissance quelconque ...).

d. Définition de $(1+\frac{1}{x})^x$ (x est une puissance quelconque ...).

e. Dérivée d'un quotient.

f. Dérivée d'un quotient.

Exercice 8

a. Étude complète, graphe compris (avec tangente au point d'abscisse 0).
On pourra notamment s'intéresser à la parité de la fonction f.

b. Le graphe précédent (qui traduit le tableau de variations) doit permettre de répondre.

Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 9

De manière générale :
- × pour les équations, on raisonne par **implication**.
- × pour les inéquations, on raisonne par **équivalence**.
- × pour déterminer $|u|$ (*i.e.* se débarrasser de la valeur absolue), il faut étudier le signe de u.
- × pour se débarrasser d'une racine, on isole la quantité $\sqrt{u}$ d'un côté de l'égalité / inégalité et on élève au carré (ce qui amène une discussion si l'on travaille par équivalence).

a. Pas besoin de déterminer $|u|$!
On élève au carré en utilisant que : $|u|^2 = |u| \times |u| = |u \times u| = |u^2| = u^2$.

b. On élève au carré.

c. On se débarrasse des valeurs absolues dans la quantités $q(x) = |2x+3| - |3x+2| - 1$. On résout l'équation pour chaque cas trouvé.
(il n'y a pas de perte d'information dans ce processus : on raisonne par équivalence)

d. On détermine le domaine de définition de l'inéquation. La résolution est triviale : pas besoin de déterminer d'inéquation équivalente plus simple.

e. On factorise complètement le polynôme et on détermine son signe (par un tableau par exemple).

Sommes et produits finis

Exercice 10

a. Écrire, si besoin, la somme en extension (avec points de suspension).

b. Reconnaître une somme géométrique.

c. Dérivée du quotient issu de la formule pour la somme géométrique.

Exercice 11

On doit penser à :

× l'éaglité : $\dfrac{k^2-1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$,

× la propriété fondamentale de ln,

× l'exercice sur les sommes télescopiques triples.

Exercice 12

a. Arranger l'expression pour faire apparaître une somme géométrique.

b. Séparer en quatre sommes.

c. On doit se servir à un moment de la formule $e^{i+j} = e^i \times e^j$.

d. Arranger l'expression pour faire apparaître une somme géométrique.

e. Séparer en un quotient de deux produits.

Exercice 13

a. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{j} 2k$?

b. On doit obtenir que $\sum\limits_{k=1}^{j} (2k-1) = j^2$.

c. Il s'agit de sommer de part et d'autre de l'égal

d. ité précédente.

e. Formule de sommation de la constante.

f. Il s'agit de sommer de part et d'autre de l'égalité précédente.

g. Calcul.

Étude de suites

Exercice 14

On peut calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 15

Calculer $v_{n+1} - v_n$ et simplifier soigneusement, en utilisant la relation de Chasles.

Étude de suites classiques

Exercice 16

Il faut connaître :

× la méthode d'étude des suites arithmético-géométriques,

× la méthode des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à connaître.

Exercice 17

a. On peut démontrer la propriété par récurrence.

b. On part de $u_{n+1} = \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dots$ puis on remplace v_{n+1} à l'aide de la formule et enfin on remplace les v_n par des $1/u_n$.

c. On commence par exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.

Exercice 18

a. On montre que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 3$ par récurrence.

b. On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on détermine son signe. On doit se servir à un moment de la question précédente.

c. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

Suites implicites

Exercice 19

Dans cet exercice et dans le suivant, on demande d'étudier des suites définies implicitement. On n'en a pas encore fait en classe, il ne faut donc pas être déstabilisé.

a. Une étude de fonction sans difficulté. On pourra rajouter les limites dans le tableau : la limite en 0 est $-\infty$ et la limite en $+\infty$ est $+\infty$.

b. Utiliser le théorème de la bijection (*i.e.* le TVI, cas des fonctions strictement monotones).

c. C'est la question difficile de l'exercice.

1) On commence par comparer $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$: qui est le plus grand des deux et pourquoi ?

2) On en déduit que la même inégalité est vérifiée entre u_n et u_{n+1}. Pourquoi ?

Exercice 20

a. On pourra rajouter les limites dans le tableau de variations : la limite en $-\infty$ est $-\infty$ et la limite en $+\infty$ est $+\infty$.

b. Utiliser le théorème de la bijection (*i.e.* le TVI, cas des fonctions strictement monotones).

c. C'est la question difficile de l'exercice.

1) On commence par comparer $f_n(0)$, $f_n(u_n)$ et $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2) On en déduit que la même inégalité est vérifiée entre 0, u_n et $\frac{1}{n}$. Pourquoi ?