Devoir surveillé n° 1

Samedi 26 septembre

Durée : 4 heures
La calculatrice est interdite.
On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Calcul
(Pas plus de 15 minutes)

Déterminer parmi les propositions suivantes celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. On ne demande pas de justifier la réponse.

(Chaque bonne réponse apporte +2, chaque réponse fausse -2 et chaque absence de réponse -1)

1. $e^{a\times b} = e^a \times e^b$

2. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

3. $b\exp(a) = \exp(a^b)$

4. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

5. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

6. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$

7. $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$

8. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

9. $\dfrac{a}{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 0$

10. $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{bd} \geqslant 0$

11. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

12. $e^a + e^b = e^{a+b}$

13. $\dfrac{4+\sqrt{1+x^2}}{2x} = \dfrac{2+\sqrt{1+x^2}}{x}$

14. $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

15. $\dfrac{a^{b^c}}{a^{c^b}} = a^{b^c - c^b}$

16. $(x^x)' = x \times x^{x-1}$

17. $x > 0 \Rightarrow x \geqslant 0$

18. $a \geqslant b \Rightarrow \dfrac{a}{b} \geqslant 1$

Cours

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Exprimer à l'aide de quantificateurs la propriété « f est strictement croissante ».

2. Écrire la négation de la propriété précédente.

3. Rappeler la définition de la fonction élévation à la puissance n où $n \in \mathbb{N}$.

4. Tracer le graphe de la fonction exponentielle.
(On précisera la tangente au point d'abscisse 0 *et on donnera une valeur approchée de l'image de* 1*.)*

Exercice 1

On note f la fonction qui à x associe $\dfrac{-5x+3}{x+7}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, $f\left(2+\sqrt{5}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On présentera les résultats sous une forme simplifiée.

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-x+1}$.

2. Résoudre l'inéquation : $\dfrac{3x+2}{x-5} \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.

3. Résoudre l'équation : $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$.

4. Résoudre l'inéquation : $x^2 - x < \pi$.

5. Factoriser complètement le polynôme : $x^3 - 3x - 2$.

6. Écrire sans valeur absolue l'expression $|-x^2+4x-1| + |-5x-10| + |3x-2|$.

7. Faire l'étude complète de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-x^2}$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation

$$a^b = b^a$$

où a et b sont des **entiers** strictement positifs tels que $a < b$.

1. Montrer que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à $f(a) = f(b)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

2. Faire l'étude de la fonction f et dresser son tableau de variations (on admettra que sa limite quand x tend vers 0 vaut $-\infty$ et que sa limite quand x tend vers $+\infty$ vaut 0). Tracer la courbe de f.

Montrer que f admet un maximum global en un point que l'on précisera.

3. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

4. Résoudre l'équation $1^b = b^1$.

5. Résoudre l'équation $2^b = b^2$.

6. Conclure en donnant l'ensemble de tous les couples (a, b) où a et b sont des entiers strictement positifs vérifiant $a^b = b^a$ et $a < b$.

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x}{x+2}$$

On note h la fonction définie sur ce même intervalle par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Étudier les variations de h. En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geqslant g(x)$.

2. Montrer que les courbes représentatives de f et g admettent une tangente commune en $x = 0$.

3. Tracer dans un même repère les deux courbes ainsi que la tangente en question.

4. On définit désormais, pour tout réel α strictement positif, la fonction f_α par

$$f_\alpha(x) = \ln(1+x) - \alpha x$$

Étudier les variations de la fonction f_1.

5. Montrer que si $\alpha \geqslant 1$, on a $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leqslant \alpha x$.

6. Existe-t-il des $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leqslant \alpha x$?