# Devoir surveillé n° 2

Samedi 7 novembre

*Durée : 4 heures*
*La calculatrice est interdite.*
*On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.*

## Exercice 1

*Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.*

***1.*** Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{5 \times 7^k}{3^{2k+1}}$.

***2.*** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 7$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel $n$ : $10u_{n+2} = 13u_{n+1} - 3u_n$. Donner une formule explicite de $u_n$.

***3.*** Donner la définition de « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ».

***4.*** La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = -1$ et, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = \dfrac{1 + 3v_n}{4}$.
Donner une formule explicite de $v_n$.

***5.*** ***a.*** Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

***b.*** Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k}$.

***c.*** En déduire une autre démonstration du résultat de la question ***a.***

***6.*** Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} (i+1)j$.

## Exercice 2

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \ln(1+w_n) \end{cases}$$

***1.*** Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $w_n$ est positif quelque soit l'entier $n$.

***2.*** Étudier les variations et le signe de la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln(1+x) - x$.

***3.*** Déduire de la question précédente que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

***4.*** Cette suite est-elle bornée ? Justifier.

## Exercice 3

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{x+1}{x-2}$$

***1.*** Donner les domaines de définition de $f$ et $g$.

***2.*** On note $a = \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$.

   ***a.*** Déterminer $g(a)$.

   ***b.*** Que vaut $f(g(a))$ ? On donnera le résultat en fonction de $a$.

   ***c.*** Simplifier l'expression de $a$.

   ***d.*** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Que vaut $f(g(x))$ ?
   On simplifiera l'expression au maximum.

***3.*** Coder les fonctions $f$ et $g$ en **Scilab**.

***4.*** Écrire un programme en **Scilab** qui :

- × demande à l'utilisateur d'entrer une valeur au clavier et stocke le résultat dans une variable `u`,
- × stocke dans une variable `calc` la valeur de $f$ calculée au point `u`,
- × stocke dans une variable `chaine` la phrase :
  `"La valeur de h en` *u* `vaut` *calc*`"`, où *u* et *calc* doivent être remplacées par leur valeur,
- × affiche la phrase précédente.

## Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

***1.*** ***a.*** Montrer que $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Calculer $u_3$.

***b.*** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \geqslant 1$.

***c.*** En déduire sans récurrence que pour tout entier naturel non nul $n$, on a $u_n \geqslant n$.

***d.*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

***2.*** Dans cette question, on pose pour tout entier naturel $n$ : $v_n = n + u_n$.

***a.*** Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $n$ et $u_n$.

***b.*** En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner une formule explicite de $v_n$, en fonction de $n$ uniquement.

***c.*** Montrer enfin que pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = 2^n - n$.

***3.*** ***a.*** Démontrer qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}.$$

***b.*** En déduire par récurrence que pour tout $n$ entier strictement positif on a :

$$\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}.$$

***c.*** Montrer finalement sans récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

## Exercice 5

On étudie les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_0 = 0, & b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + b_n, & \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$$

***1.*** À quel type de suite remarquable appartient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
En déduire une expression de $b_n$ en fonction de $n$.

***2.*** Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel $n$.

***a.*** Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et préciser son premier terme.

***b.*** En déduire une expression de $c_n$ en fonction de $n$.

***c.*** Déduire des questions précédentes qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n2^{n-1}$$

***3.*** **Application au calcul d'une somme**

***a.*** Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k.$$

***b.*** Montrer qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}.$$

***c.*** Pour tout entier naturel $n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

***d.*** Déduire des questions précédentes qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$