Devoir surveillé n° 3

Lundi 14 décembre

Durée : 4 heures

*L'épreuve est constituée de trois exercices (**1**, **2** et **3**) obligatoires, et d'un problème (**A** ou **B**) au choix. Le problème **B** est plus difficile que le problème **A** mais peut rapporter plus de points.*

On est invité à prendre connaissance immédiatement des énoncés des deux problèmes. Au plus tard dix minutes après le début de l'épreuve, on choisira le problème traité et on l'indiquera en haut de la copie. On ne reviendra pas sur ce choix.

On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient X, Y et Z trois ensembles. Montrer que $X \cup Y = X \cap Z \Leftrightarrow Y \subset X \subset Z$.

2. Soit $u : A \to B$ et $v : B \to C$ deux applications. On suppose que $v \circ u$ est surjective.
Montrer que v est surjective.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement décroissante.
Montrer que f est injective.

4. On note $A = \{\{1, 2\}, 3, \varnothing\}$.
Détailler $\mathcal{P}(A)$. Quel est son cardinal ?
Combien y a-t-il d'applications de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans A ?

5. On note $E = [\![0; 12]\!]$ et on considère l'application $f : E \to E$ donnée par le tableau de valeurs suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	12	2	9	3	8	0	4	10	7	11	6	1	5

a. L'application f est-elle injective ? surjective ? (Justifier).
Si elle est bijective, donner sa bijection réciproque f^{-1}.

b. Si x est un élément de E, on appelle *orbite de* x et on note $\mathrm{Orb}(x)$ la partie de E contenant x, $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ ...
Si l'on considère $x = 0$, on a : $f(0) = 12$, $f(f(0)) = f(12) = 5$, $f(f(f(0))) = f(5) = 0$.
On en déduit que l'orbite de 0 est $\{0, 5, 12\}$.
Déterminer $\mathrm{Orb}(1)$.

c. Donner quatre éléments a, b, c et d de E tels que tout élément x de E soit dans l'orbite de a, b, c ou d.

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ (le symbole f apparaît n fois).
Si $x \in \mathrm{Orb}(0)$, que vaut $f^3(x)$?
Si $x \in \mathrm{Orb}(1)$, que vaut $f^4(x)$?

e. Montrer que $f^{60} = \mathrm{id}_E$.

Exercice 2

On considère les trois suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la nature de ces trois suites.

1. **Étude de** $(u_n)_{n\geqslant 1}$

a. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geqslant 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

b. Démontrer à l'aide du résultat précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geqslant 2\sqrt{n+1}-2$.

c. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

2. **Étude de** $(v_n)_{n\geqslant 1}$

a. Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $v_n \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$.

c. Calculer explicitement la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k}$.

Indication : on pourra commencer par chercher deux nombres réels a et b tels qu'on ait, pour tout $k \geqslant 2$, l'égalité $\dfrac{1}{k^2-k} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$.

d. Déduire des questions précédentes que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 2 puis qu'elle converge.

3. **Étude de** $(w_n)_{n\geqslant 1}$

a. Étudier la monotonie de la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leqslant v_n$.

c. La suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

d. Écrire une fonction `premiersElmtsW` en **Scilab** qui :

- × prend en paramètre un entier `m`,
- × stocke dans une variable `aux` les `m` premiers éléments de la suite (w_n),
- × calcule les `m` premières valeurs de la suite (w_n) (*i.e.* `[`w_1`, `w_2`, ..., `$w_{\mathtt{m}}$`]`).

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$.

1. ***a.*** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n + n$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.

3. Écrire la fonction $f : x \mapsto 3 \times 2^x - x - 2$ en **Scilab**.

4. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer la somme S_n en fonction de n.

5. Écrire un programme **Scilab** qui demande à l'utilisateur un entier n, et qui affiche S_n.

Problème A

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) \;=\; \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} \qquad \text{et} \qquad g(x) \;=\; x^3 - 3x + 1$$

On définit de plus la suite (x_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n) \end{array} \right.$

1. **Étude de la fonction** g

a. Étudier les variations de la fonction g.

b. Écrire la fonction g en **Scilab**.

c. Notons $\tilde{g} :]0, \frac{1}{2}[\to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[,\ \tilde{g}(x) = g(x)$.
L'application $\tilde{g}$ est-elle injective ?

d. Démontrer que $\tilde{g}$ réalise une bijection de $]0, \frac{1}{2}[$ sur un ensemble A à préciser.

e. En déduire que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une unique solution $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.

2. **Étude de la fonction** f

a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.
En déduire que α est l'unique solution de $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et déterminer son signe sur $\mathbb{R}^+$.

3. **Étude de la suite** (x_n)

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \geqslant x_n$.

b. Montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$.

c. Montrer que la suite (x_n) converge vers α.

Problème B

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 strictement positif, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$$

Pour tout réel strictement positif a, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_a(x) = x - \sqrt{x} - a$$

1. Pour $a > 0$ fixé, montrer que l'équation $f_a(x) = 0$ (d'inconnue x) possède une unique solution réelle notée $\ell(a)$, dont on donnera l'expression en fonction de a.

2. Étudier les variations de f_a.

3. Écrire une fonction **Scilab** nommée `f` qui prend en paramètre deux réels `a` et `x` et renvoie $f_a(x)$.

4. Démontrer que la fonction $\ell : a \mapsto \ell(a)$ est croissante.

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $u_n > 1$. Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite.

6. On suppose ici que la suite (u_n) vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$$(\mathcal{P}) : \text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on a } u_n \leqslant \ell\left(\frac{1}{n}\right)$$

- ***a.*** Que vaut $\ell(1)$? En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
- ***b.*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
- ***c.*** Démontrer par l'absurde que la propriété $(\mathcal{P})$ est fausse.

7. **Conclusion**

- ***a.*** D'après la question précédente, quelle propriété la suite (u_n) vérifie-t-elle ?
- ***b.*** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang m.
- ***c.*** En déduire que (u_n) converge.