Devoir surveillé n° 5

Samedi 13 février

Durée : 4 heures

*L'épreuve est constituée de quatre exercices communs, et d'un problème (**A** ou **B**) au choix. Le problème **B** est plus difficile que le problème **A** mais peut rapporter plus de points.*

On est invité à prendre connaissance immédiatement des énoncés des deux problèmes. Au plus tard dix minutes après le début de l'épreuve, on choisira le problème traité et on l'indiquera en haut de la copie. On ne reviendra pas sur ce choix.

On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.
On se propose de construire la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est bien $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2. **Étude sur** $]0, +\infty[$

- ***a.*** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ et déterminer son signe.
- ***b.*** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{e^{2x}-1}$.
- ***c.*** En déduire la limite de f en $+\infty$.
- ***d.*** Déterminer la limite de f en 0^+.
- ***e.*** En utilisant les résultats précédents, dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$.
  Déterminer le signe de f sur $]0, +\infty[$.

3. **Construction de la courbe $\mathcal{C}$.**

- ***a.*** Montrer que pour tout x non nul on a $f(-x) = -f(x)$.
  En déduire une propriété de symétrie de $\mathcal{C}$.
- ***b.*** Calculer $f(\ln 3)$ et $f'(\ln 3)$ (on donnera leur valeur exacte).
- ***c.*** Construire $\mathcal{C}$ avec tous ses éléments remarquables.
  On donne les valeurs approchées :
  $\ln 3 \approx 1,1 \qquad 5/4 \approx 1,2 \qquad 9/16 \approx 0,6 \qquad 9/32 \approx 0,3$

Exercice 2

1. Résoudre le système suivant, d'inconnues x, y et z :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 9 \\ 4x & - & 2y & + & 45z & = & 10 \end{array}\right.$$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\ln(x)}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$.

Exercice 3

On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire « face » est $\dfrac{1}{3}$ et de quatre urnes numérotés de 0 à 3. Pour $k \in \{0,1,2,3\}$, l'urne n$^\circ$ k contient k boules vertes et $(3-k)$ boules rouges.

On considère l'expérience $(\mathcal{E})$ suivante : on lance trois fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où « face » a été obtenu. Par exemple, si on a obtenu deux « face » au cours de ces trois lancers, on pioche une boule dans l'urne n$^\circ$ 2.

On note, pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, F_k l'événement « on a obtenu k fois « face » au cours des trois lancers ». V est l'événement « la boule tirée est verte ».

1. Justifier que, pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, la probabilité de l'événement F_k est égale à :

$$P(F_k) = \binom{3}{k}\frac{2^{3-k}}{27}$$

Donner les valeurs de ces probabilités sous forme de fractions irréductibles.

On vérifiera en particulier que $P(F_2) = \dfrac{2}{9}$.

2. Donner, pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, la probabilité conditionnelle $P_{F_k}(V)$.

3. Montrer que $P(V) = \dfrac{1}{3}$.

4. Calculer $P_V(F_2)$.

5. Les événements F_1 et V sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\ln(x) - 1$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

4. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
On note u_n cette solution. Justifier que $u_n > 1$.

6. On note g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a. Justifier que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.

b. Donner le tableau de variation complet de la réciproque g^{-1} sur J.

c. Exprimez u_n à l'aide de g^{-1}.
En déduire la monotonie de la suite (u_n) et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème A

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 e^x - 1$.

Étude d'une fonction

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2. Tracer la courbe représentative de φ.

3. ***a.*** Déterminer le nombre d'antécédents de 5 par φ.

b. Déterminer le nombre d'antécédents de $-\dfrac{2}{3}$ par φ.

4. Établir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $x^3 e^x$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Étude d'une suite

5. Montrer que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?

Informatique

8. Coder la fonction $f : x \mapsto x^3\ e^x$ en **Scilab**.

9. Coder la fonction `calculSuite` qui prend en paramètre un entier `m` et renvoie le tableau `tab` contenant les `m` premières valeurs de la suite (u_n) de l'énoncé.

10. Coder la fonction `calculElementSuite` qui prend en paramètre un entier `m` et renvoie la variable `u` contenant le `m`ème élément de la suite (u_n) de l'énoncé.
(on ne pourra pas faire appel à la fonction précédente)

Problème B

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, soit f_k la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^k}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. **Étude des fonctions f_k**

a. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Lorsque x appartient à $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, donner la valeur de $f_k'(x)$.

b. On considère les fonctions auxiliaires φ_k définies, pour tout $x > 0$, par :

$$\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln x$$

Étudier, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, les variations de la fonction φ_k.
Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1,+\infty[$.
Dans la suite, on notera a_k cette solution.

c. En distinguant les cas $k = 2$, k pair supérieur ou égal à 4, k impair supérieur ou égal à 3, donner le tableau de variations de la fonction f_k (on précisera les limites aux bornes).

2. **Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k\geqslant 2}$**

a. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $e^{k-1} \leqslant a_k \leqslant e^k$.

b. Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose $a_k = e^k(1+\delta_k)$.
Montrer que le réel δ_k vérifie l'équation :

$$-ke^{-k} \;=\; (1+\delta_k)\ln(1+\delta_k)$$

Justifier l'inégalité $|\ln(1+\delta_k)| \leqslant ke^{1-k}$.
En déduire que la suite $(\delta_k)_{k\geqslant 2}$ a une limite nulle et, plus précisément, que δ_k est équivalent à $-ke^{-k}$ quand k tend vers $+\infty$.

c. Justifier en conclusion qu'on a, quand k tend vers $+\infty$:

$$a_k - e^k + k = \underset{k\to+\infty}{o}(k)$$

3. **Informatique**

a. Coder la fonction φ_4 en **Scilab**.

b. Écrire la fonction `calculSuite` qui prend en paramètre un entier `m` et renvoie le tableau `tab` contenant les `m` premiers éléments de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi_4(u_n) \end{cases}$$

c. Coder la fonction `calculElementSuite` qui prend en paramètre un entier `m` et renvoie la variable `u` contenant le `m`$^{\text{ème}}$ élément de la suite (u_n) précédente.
(on ne pourra pas faire appel à la fonction précédente)