Devoir surveillé n° 6

Samedi 26 mars

Durée : 4 heures

*L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants, et d'un problème (**A** ou **B**) au choix. Le problème **B** est plus difficile que le problème **A** mais peut rapporter plus de points.*

On est invité à prendre connaissance immédiatement des énoncés des deux problèmes. Au plus tard dix minutes après le début de l'épreuve, on choisira le problème traité et on l'indiquera en haut de la copie. On ne reviendra pas sur ce choix.

On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1

Pour tout nombre réel a, on considère la matrice $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $M(0)$ et $M(1/2)$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, exprimer $M(a)$ en fonction des matrices I_2 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et calculer J^2.

3. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $M(a)M(b) = M(a+b-2ab)$.

4. On suppose que $a \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $M(a)$ est inversible et qu'il existe un $b \in \mathbb{R}$ tel que $M(b) = (M(a))^{-1}$. On exprimera b en fonction de a.

5. La matrice $M(1/2)$ est-elle inversible ?

6. Déterminer l'unique nombre $a_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $(M(a_0))^2 = M(a_0)$.

7. On considère désormais les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I_2 - P$.

- ***a.*** Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) = P + \alpha Q$ et exprimer α en fonction de a.
- ***b.*** Calculer P^2, PQ, QP et Q^2.
- ***c.*** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $(M(a))^n$ en fonction de P, Q, α et n.
- ***d.*** Expliciter la matrice $(M(a))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $a \neq \dfrac{1}{2}$, la formule obtenue est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 2

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 4A - 8I_2$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
3. Retrouver A^{-1} à l'aide de la formule de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.

Exercice 3

Dans cet exercice, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f par :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

1. Justifier que son ensemble de définition est bien $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, en précisant la valeur en 0 de la fonction prolongée.
   On appellera désormais f la fonction prolongée, définie sur $[0, +\infty[$.
3. Étudier la continuité de f.
4. Démontrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Est-elle dérivable en 0 ?
   Quelle est l'allure de la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$?
5. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 1 de f.
6. Dresser le tableau de variations de f, en précisant valeurs et limites aux bornes.
7. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner $f''(x)$ pour $x > 0$.

On donne : $\mathrm{e}^{-2} \approx 0,14$ $\quad 2/e \approx 0,74$

Exercice 4

Le but de cet exercice est de donner des formules explicites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par les premiers termes :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 1$$

et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rclll} u_{n+1} & = & 3u_n & -2v_n & -w_n \\ v_{n+1} & = & u_n & & -w_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n & -2v_n & \end{array} \right.$$

Partie I - Puissances de matrice

1. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $C - \lambda I_3$ est-elle inversible ?

2. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Démontrer que $D = P^{-1}CP$.

3. Exprimer la matrice C en fonction de D, P et P^{-1}.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n = PD^nP^{-1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter la matrice D^n puis donner les coefficients de C^n.

Partie II - Suites

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $X_{n+1} = CX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^nX_0$.

7. Que vaut X_0 ? En déduire X_n, puis u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Problème A

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

Le but de ce problème est d'étudier l'équation $f_n(x) = 0$ et le comportement de la solution quand n tend vers $+\infty$.

1. ***a.*** Dresser le tableau de variations de f_n et montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.

b. Calculer u_1 et u_2.

c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$.

2. ***a.*** Montrer que pour tout réel x de $]0,1[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite (u_n).

c. Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. ***a.*** Déterminer un encadrement de ${u_n}^n$ pour tout $n \geqslant 1$ et en déduire la limite de ${u_n}^n$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Donner enfin la valeur de ℓ.

4. On note $u_n = \dfrac{2}{3} + v_n$.

a. Vérifier que v_n tend vers 0.

b. Montrer que $\left(\dfrac{2}{3} + v_n\right)^n + 9\ {v_n}^2 + 12\ v_n = 0$.

c. En déduire que $v_n = \dfrac{-\left(\dfrac{2}{3} + v_n\right)^n}{9\ v_n + 12}$ puis que v_n est équivalent à $-\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

5. Définir en **Scilab** la fonction `f5`, qui prend un réel x et calcule $f_5(x)$.
Tracer en **Scilab** la courbe représentative de f_5.

6. Compléter le programme suivant, pour calculer u_5 par la méthode de dichotomie, à 10^{-4} près :

```
g = ...
d = ...
m = ...
while d-g > 10^(-4)
    if f5(  ... ) > 0 then
        ...
    else
        ...
    end
    m = ...
end
disp( ... )
```

Problème B (d'après EDHEC 2004)

Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x\ \mathrm{e}^{-n/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f_n est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$.

2. Étudier les variations de f_n, ainsi que sa limite en $+\infty$. dresser son tableau de variations.

3. La fonction f_n est-elle deux fois dérivable sur tout son ensemble de définition ? Préciser $f_n''(x)$ pour tout x en lequel f_n est deux fois dérivable.

4. Tracer dans un même repère l'allure des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

5. ***a.*** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 1$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n > 1$, et u_n est solution de l'équation $x \ln x = n$.

c. Étudier la fonction g définie par $g(x) = x \ln x$. En déduire que la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est $+\infty$.

d. Montrer que $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$ et en déduire un équivalent simple de u_n.

6. Dans cette question, on ne s'intéresse plus qu'à la fonction f_1 définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_1(x) = \begin{cases} x\ \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On définit par ailleurs une suite (v_n) par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Déterminer le signe de $f_1(x) - x$ sur $[0,+\infty[$ et les éventuelles solutions dans $[0,+\infty[$ de l'équation $f_1(x) = x$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0,1]$.

c. Étudier la monotonie de la suite (v_n).

d. En déduire que (v_n) converge et préciser sa limite.

7. Écrire une fonction **Scilab** qui prend un entier n et qui calcule v_n.