Devoir surveillé n° 7

Lundi 2 mai

Durée : 4 heures

*L'épreuve est constituée de deux exercices indépendants, et d'un problème (**A** ou **B**) au choix. Le problème **B** est plus difficile que le problème **A** mais peut rapporter plus de points.*

On est invité à prendre connaissance immédiatement des énoncés des deux problèmes. Au plus tard dix minutes après le début de l'épreuve, on choisira le problème traité et on l'indiquera en haut de la copie. On ne reviendra pas sur ce choix.

On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n \, dt$$

1. Démontrer que $u_1 = \displaystyle\int_1^2 \ln(x)\, dx$ puis calculer u_1 à l'aide d'une intégration par parties.

2. On considère la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$.
Préciser l'ensemble de définition de f, démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle. Préciser la convexité de f.
Enfin, tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (on donne : $\ln(2) \simeq 0{,}7$).

3. ***a.*** Justifier pour tout réel t de $[0,1]$ l'encadrement suivant : $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln(2)$.

b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

4. ***a.*** À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n la relation suivante :

$$u_{n+1} = 2\,(\ln(2))^{n+1} - (n+1)\, u_n$$

(on pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \mapsto 1$ est $t \mapsto 1+t$)

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+1)\, u_n \;\leqslant\; 2\,(\ln(2))^{n+1}$$

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)\, u_n \;\geqslant\; 2\,(\ln(2))^{n+1}$$

e. Démontrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\,(\ln(2))^{n+1}}{n}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. ***a.*** Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

b. Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

d. Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1{,}65$ et $e \simeq 2{,}72$ au centième près.

e. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x)$. En déduire que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

f. Vérifier que $f\left(\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

3. **Informatique**

a. Écrire une fonction **Scilab** `f` qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$.

b. En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n.

c. En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Scilab** une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

Problème A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} & u_0 &= \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & u_n &= \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Étude de f

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
4. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.
5. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I = [0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
6. Pour tout y de l'intervalle $]0,1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :
$$f(x) = y$$
7. En déduire une expression de $f^{-1} : J \to I$, bijection réciproque de $f : I \to J$.

Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

Ainsi :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{2\lambda} f(x)\,dx$$

8. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
En déduire l'ensemble de définition de F.

9. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

10. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.

11. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$.

12. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Étude de la suite (u_n).

13. Calculer u_0 et u_1.

14. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3.

15. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

16. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
(on ne cherchera pas sa limite dans cette question)

17. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$$

en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

18. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Problème B

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

2. Pour x dans $\mathbb{R}$, on note $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$.

- ***a.*** Quelle est la parité de g ?
- ***b.*** Calculer explicitement $g(x)$. On pourra distinguer les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
- ***c.*** Quel est le plus grand entier n tel que g soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$?
- ***d.*** Montrer que $g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

4. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

On considère la fonction φ_x définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[$, $\varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\,dt$.

- ***a.*** Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.
- ***b.*** Montrer : $\forall (u,v) \in [0, +\infty[^2, \quad u < v \ \Rightarrow \left(\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt \right)$.
  En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- ***c.*** On admet que φ_x est continue sur $[0, +\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$.

On note $U : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0, +\infty[$, associe $U(x)$, l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

5.
- ***a.*** Vérifier, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$: $\quad U(x) = 1 - x$.
- ***b.*** Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, montrer : $\quad \varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geqslant 0$, et en déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

6.
- ***a.*** Montrer que l'application U est continue sur $[0, +\infty[$.
- ***b.*** Étudier la dérivabilité de U sur $[0, +\infty[$
- ***c.*** Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

7. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} & = & U(a_n) \end{array}\right.$$

a. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

d. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant 10^{-6}$$

e. Qu'est-ce qui permet d'assurer la terminaison du programme précédent ?