Concours Blanc n$^{\text{o}}$ 2

—

Mathématiques

Mercredi 1er juin

Durée : 4 heures
La calculatrice est interdite.

Exercice 1

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\, dx$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

3. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n}$.

4. En déduire une fonction Scilab qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2u_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. À l'aide de l'inégalité précédente, trouver un équivalent simple de u_n.

7. Démontrer par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$u_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$$

Cette égalité reste-t-elle vraie lorsque $n = 1$?

8. Écrire une fonction Scilab qui demande un entier n strictement positif et qui renvoie u_n, comme dans la question *4*, mais en utilisant l'égalité de la question précédente.

Exercice 2

Soit p un entier naturel fixé. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par : $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

1. ***a)*** Rappeler les valeurs de $\binom{n}{n}$, $\binom{n+1}{n}$ et $\binom{n+2}{n}$.

b) Montrer que si $p=0$ ou $p=1$, la série $\sum u_n$ diverge.

c) Quelle est la nature de la série lorsque $p=2$?

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p \geqslant 2$ et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

2. ***a)*** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.

b) En déduire par récurrence sur n que $S_n = \dfrac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)u_{n+1}\right)$.

3. ***a)*** On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ positive ou nulle.

c) Déduire du résultat précédent que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et donner sa somme en fonction de p et ℓ.

4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.

a) Montrer que $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

b) En déduire une contradiction avec la question *3*.

5. Donner la valeur de ℓ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ en fonction de p.

Exercice 3

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n,+\infty[, f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\,dt$.

1. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n,+\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n,+\infty[$.

2. Donner le sens de variation de f_n.

3. En minorant $f_n(x)$, établir que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

4. En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel $\alpha_n \in [n,+\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$.

Problème

L'objet du problème est d'étudier les solutions des équations

$$x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$$

où N est un entier strictement positif et a un nombre réel strictement positif. La première question est consacrée au cas particulier $a = 1$ et $N = 2$. La deuxième question traite le cas général.

1. **Résolution numérique de l'équation** $x^2 + x - 1 = 0 \qquad (0 < x < 1)$

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule solution dans l'intervalle $]0{,}1[$, que l'on notera r_2. Préciser la valeur de r_2.

b) Montrer que si x est un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}{,}1\right]$, alors $f(x)$ appartient aussi à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}{,}1\right]$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}{,}1\right]$.

c) Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$:

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$$

d) Prouver l'inégalité suivante, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - r_2|$$

En déduire qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

e) À partir de quelle valeur de n le terme u_n est-il une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près ?
On choisira la réponse parmi : $n = 9$, 18, 24, ou 36.
On donne : $\ln 10 \simeq 2{,}30 \qquad \ln 2 \simeq 0{,}69 \qquad \ln 3 \simeq 1{,}10$.

2. Étude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$

On note f_N la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a$.

a) Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive x_N. Montrer que lorsque $N > a$, on a $x_N \in]0,1[$.

b) Montrer la relation :

$$(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$$

c) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante. Montrer que x_N converge vers un nombre x^* appartenant à $[0,1[$, quand N tend vers $+\infty$.

d) Soit A un entier naturel non nul tel que $A \leqslant N$. Montrer que $0 < x_N^N \leqslant x_A^N$.

En choisissant $A \geqslant a$, en déduire la limite de x_N^N lorsque N tend vers $+\infty$ puis, à l'aide de la question ***2b)***, exprimer x^* en fonction de a.

On convient alors de poser $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

e) Établir à l'aide de la relation de la question ***2b)*** l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N \ln \varepsilon_N + \varepsilon_N \ln a$$

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1+\varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer un équivalent de ε_N en fonction de a et N.