Concours Blanc n° 2

—

Mathématiques

Vendredi 3 juin

Durée : 4 heures
La calculatrice est interdite.

Exercice

Dans cet exercice, on considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. ***a)*** Calculer $A^2 - 4A$.

b) En utilisant la question précédente, montrer que A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}.

2. On considère maintenant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.

b) Déterminer deux réels a et b tels qu'on ait : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Dans la suite, on note $T = P^{-1}AP$ la matrice précédente et on écrit $T = 2I + N$.

a) Préciser la matrice N puis calculer N^2.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n.

4. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = n2^{n-1}\, A - (n-1)2^n\, I$.

b) La formule précédente est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Problème

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie (pas forcément équilibrée). On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse dans cet exercice au moment où apparaissent pour la première fois deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel k non nul, on note :

- P_k l'événement « on obtient pile au k-ième lancer ».
- F_k l'événement « on obtient face au k-ième lancer ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « deux piles consécutifs apparaissent pour la première fois aux lancers numéros n et $n + 1$ ». On pose alors :

× pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, la probabilité de A_n.

× par convention, $a_0 = 0$.

Partie 1. Préliminaire : encadrement des racines d'une équation.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - q\,x - p\,q$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 $(r_1 < r_2)$.

2. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de p et q.

3. Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$. Préciser le signe de chacune de ces quantités.

4. Montrer que :

$$-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$$

5. Montrer que :

$$|r_1| < |r_2| < 1$$

Partie 2. Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. a) Écrire A_1 en fonction de P_1 et P_2. En déduire que : $a_1 = p^2$.

b) En raisonnant de même, déterminer a_2 en fonction de p et q.

c) Déterminer enfin a_3 en fonction de p et q.
On écrira tout d'abord A_3 en fonction des événements P_i et F_i pour $i \in \{1,2,3,4\}$.

2. ***a)*** Expliquer pourquoi $\mathbb{P}_{P_1}(A_{n+2}) \;=\; q\,a_n$ et $\mathbb{P}_{F_1}(A_{n+2}) \;=\; a_{n+1}$.

b) En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} \;=\; q\,a_{n+1} + p\,q\,a_n$$

3. ***a)*** Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}\,(r_2^n - r_1^n)$.

b) Déterminer la limite de la suite (a_n).

c) Donner un équivalent simple de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 3. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices colonnes X_n par :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de taille 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n.

2. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles. Que peut-on en déduire sur les équations matricielles $A\,X = r_1\,X$ et $A\,X = r_2\,X$ de variable $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

3. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

4. Expliciter la matrice $D \;=\; P^{-1} A\,P$.

5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n \;=\; P^{-1} A^n\,P$.

6. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = P\,D^n P^{-1} X_0$.

7. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_2, r_1, p et n.

Partie 4. Étude du temps d'attente du premier double pile.

1. Exprimer $(1-r_2)(1-r_1)$ en fonction de p.

2. Exprimer $\dfrac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{r_2 - r_1}$ en fonction de p et de q.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k)$ en fonction de p, r_1 et r_2.
Que représente cette quantité ?

4. En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente et calculer sa somme.

5. Démontrer que la série $\sum(n+1)\,a_n$ est convergente et que sa somme vaut $T = \dfrac{1+p}{p^2}$.
On commencera par exprimer $T_N = \sum\limits_{k=1}^{N} (k+1)\mathbb{P}(A_k)$ en fonction de p, r_1, r_2 et S_N.

6. Que représente la quantité T_N ?