Devoir surveillé n° 1

Samedi 26 septembre

Calcul
(Pas plus de 15 minutes)

Déterminer parmi les propositions suivantes celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. On ne demande pas de justifier la réponse.
(Chaque bonne réponse apporte +2, chaque réponse fausse -2 et chaque absence de réponse -1)

1. $e^{a\times b} = e^a \times e^b$
2. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
3. $b \exp(a) = \exp(a^b)$
4. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$
5. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
6. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$
7. $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$
8. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
9. $\dfrac{a}{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 0$
10. $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{ad-bc}{bd} \geqslant 0$
11. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$
12. $e^a + e^b = e^{a+b}$
13. $\dfrac{4+\sqrt{1+x^2}}{2x} = \dfrac{2+\sqrt{1+x^2}}{x}$
14. $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
15. $\dfrac{a^{b^c}}{a^{c^b}} = a^{b^c - c^b}$
16. $(x^x)' = x \times x^{x-1}$
17. $x > 0 \Rightarrow x \geqslant 0$
18. $a \geqslant b \Rightarrow \dfrac{a}{b} \geqslant 1$

Démonstration.
Les propositions ***1)***, ***3)***, ***4)***, ***6)***, ***7)***, ***9)***, ***11)***, ***12)***, ***13)***, ***16)***, ***18)*** sont fausses.
Les autres propositions sont vraies. □

Cours

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Exprimer à l'aide de quantificateurs la propriété « f est strictement croissante ».

Démonstration.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x > y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y))}$$

□

2. Écrire la négation de la propriété précédente.

Démonstration.

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x > y \ \texttt{ET}\ f(x) \leqslant f(y))}$$

□

3. Rappeler la définition de la fonction élévation à la puissance n où $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction élévation à la puissance n est définie comme suit.

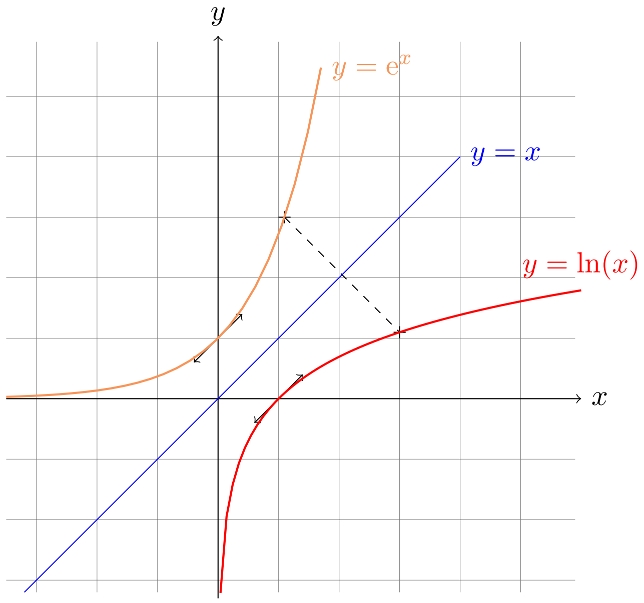
$$\begin{array}{rccccl} .^n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \mapsto & x^n & = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n-1 \text{ multiplications}} \end{array}$$

- Par convention, l'opérateur élévation à la puissance 0 est la fonction constante égale à 1. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^0 \ = \ 1$.

□

4. Tracer le graphe de la fonction exponentielle.
(On précisera la tangente au point d'abscisse 0 *et on donnera une valeur approchée de l'image de* 1*.)*

Démonstration.



□

Exercice 1

On note f la fonction qui à x associe $\dfrac{-5x+3}{x+7}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

Démonstration.
La fonction f est définie pour tous les éléments $x \in \mathbb{R}$ tels que $x + 7 \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est définie sur l'ensemble } \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-7\}}$$

□

2. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, $f\left(2+\sqrt{5}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On présentera les résultats sous une forme simplifiée.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{3}\right) &= \frac{-5(\frac{-1}{3})+3}{(\frac{-1}{3})+7} \\
&= \frac{\frac{5}{3}+3}{\frac{-1}{3}+7} \\
&= \frac{\frac{14}{3}}{\frac{20}{3}} = \frac{14}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{20} \\
&= \frac{14}{20} = \frac{7}{10}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f(2+\sqrt{5}) &= \frac{-5(2+\sqrt{5})+3}{(2+\sqrt{5})+7} \\
&= \frac{-7-5\sqrt{5}}{9+\sqrt{5}} = \frac{(-7-5\sqrt{5})(9-\sqrt{5})}{9^2-(\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{-63-38\sqrt{5}+25}{81-5} = \frac{-38-38\sqrt{5}}{76} \\
&= -\frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Le calcul suivant est valable seulement si $x \neq 0$ et $\frac{1}{x} \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-7\}$.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{-5(\frac{1}{x})+3}{(\frac{1}{x})+7} = \frac{\frac{-5}{x}+3}{\frac{1}{x}+7} \\
&= \frac{\frac{3x-5}{x}}{\frac{7x+1}{x}} = \frac{3x-5}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{x}}{7x+1} \\
&= \frac{3x-5}{7x+1}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{10}, \quad f(2+\sqrt{5}) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3x-5}{7x+1}}
$$

□

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-x+1}$.

Démonstration.
La quantité $f(x)$ est définie si $\sqrt{x+1}$ est définie et si $\sqrt{x+1}-x+1 \neq 0$.

- La quantité $\sqrt{x+1}$ est définie si $x+1 \geqslant 0$ *i.e.* si $x \geqslant -1$.
- Afin de trouver les réels x tels que $\sqrt{x+1}-x+1 \neq 0$, on commence par résoudre l'équation : $\sqrt{x+1}-x+1=0$ (E).

  0) L'équation (E) est définie pour tout $x \geqslant -1$. Notons $\mathscr{D}_{(E)} = [-1,+\infty[$.

  1) Soit $x \geqslant -1$. On procède par implication :

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x+1}-x+1=0 && (1)\\
\Rightarrow\ & \sqrt{x+1}=x-1 && (2)\\
\Rightarrow\ & (\sqrt{x+1})^2=(x-1)^2 && (3)\\
\Rightarrow\ & x+1=x^2-2x+1 && (4)\\
\Rightarrow\ & x^2-3x=0 && (5)\\
\Rightarrow\ & x(x-3)=0 \quad (E') && (6)
\end{aligned}
$$

(en fait, seul le passage de la ligne (2) *à la ligne* (3) *n'est pas une équivalence)*

2) L'équation (E') admet deux solutions : 0 et 3.

3) Testons les solutions de (E') sur l'équation initiale (E) :

- $0 \in \mathscr{D}_{(E)}$. De plus : $\sqrt{0+1} - 0 + 1 = \sqrt{1} + 1 = 2 \neq 0$. Ainsi, 0 n'est pas solution de (E).
- $3 \in \mathscr{D}_{(E)}$. De plus : $\sqrt{3+1} - 3 + 1 = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$. Ainsi, 3 est solution de (E).

L'équation (E) admet donc 3 pour unique solution.
On en déduit que $\sqrt{x+1} - x + 1 \neq 0$ dès que $x \neq 3$.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathscr{D}_f = [-1, +\infty[\setminus \{3\} = [-1, 3[\cup]3, +\infty[}$$

□

2. Résoudre l'inéquation : $\dfrac{3x+2}{x-5} \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.

Démonstration.

0) Notons (I) cette inéquation. Elle est définie lorsque $x - 5 \neq 0$ et $x \neq 0$.
Autrement dit, (I) est définie sur $\mathscr{D}_{(I)} = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$.

1) Soit $x \in \mathscr{D}_{(I)}$. On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} & \frac{3x+2}{x-5} \geqslant 1 - \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x(3x+2)}{x(x-5)} - \frac{x(x-5)}{x(x-5)} + \frac{x-5}{x(x-5)} \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3x^2 + 2x - (x^2 - 5x) + x - 5}{x(x-5)} \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2x^2 + 8x - 5}{x(x-5)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

2) Notons $P(X) = 2X^2 + 8X - 5$.
Ce polynôme a pour discriminant réduit $\Delta' = 4^2 - (-5) \times 2 = 16 + 10 = 26 > 0$.
Ainsi, P admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{26}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{26}}{2}$.
Comme : $25 < 26 < 36$, on a : $5 < \sqrt{26} < 6$. On en déduit que :

- $-6 < -\sqrt{26} < -5$. Ainsi : $-10 = -4 - 6 < -4 - \sqrt{26} < -5 - 4 = -9$.
  D'où $-5 < \dfrac{-4 - \sqrt{26}}{2} < -\dfrac{9}{2}$.
- De même, on a : $1 = -4 + 5 < \sqrt{26} < -4 + 6 = 2$.
  D'où $\dfrac{1}{2} < \dfrac{-4 + \sqrt{26}}{2} < \dfrac{2}{2} = 1$.

On en déduit que : $x_1 < 0 < x_2 < 5$.

Il ne reste plus qu'à déterminer le signe du quotient présent dans l'inéquation.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		5		$+\infty$
Signe de $2x^2 + 8x - 5$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $x - 5$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{2x^2+8x-5}{x(x-5)}$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	

□

3. Résoudre l'équation : $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$.

Démonstration.
Notons $P(X) = X^8 - 13X^4 + 36$ et (E) l'équation considérée : $P(x) = 0$.
Notons alors $u = x^4$ et considérons le polynôme $Q(X) = X^2 - 13X + 36$.
Sous ces notations, on a : $P(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; Q(u) = 0$.
Le polynôme Q a pour discriminant : $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 36 = 169 - 144 = 25$.
Ainsi, Q admet pour racines :

$$u_1 = \frac{13-5}{2} = 4 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{13+5}{2} = 9$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow Q(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow (u-u_1)(u-u_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^4-4)(x^4-9) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, x est solution de (E) si et seulement si : $x^4 - 4 = 0$ OU $x^4 - 9 = 0$. Or :

$$\begin{array}{llll} & x^4 - 4 = 0 & & \\ \Leftrightarrow & (x^2-2)(x^2+2) = 0 & & \\ \Leftrightarrow & (x^2-2) = 0 & (\textit{car } x^2+2>0) & \\ \Leftrightarrow & x = \sqrt{2} \text{ OU } x = -\sqrt{2} & & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} & x^4 - 9 = 0 & & \\ \Leftrightarrow & (x^2-3)(x^2+3) = 0 & & \\ \Leftrightarrow & (x^2-3) = 0 & (\textit{car } x^2+3>0) & \\ \Leftrightarrow & x = \sqrt{3} \text{ OU } x = -\sqrt{3} & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'ensemble des solutions de } E \text{ est } S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.}$$

□

4. Résoudre l'inéquation : $x^2 - x < \pi$.

Démonstration.
Notons (I) cette inéquation et $P(X) = X^2 - X - \pi$.
Le polynôme P a pour discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-\pi) = 1 + 4\pi > 0$.
P admet donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1+4\pi}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4\pi}}{2}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (I) \text{ est } S =]x_1, x_2[.}$$

□

5. Factoriser complètement le polynôme : $X^3 - 3X - 2$.

Démonstration.
Notons $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

- Le polynôme P admet -1 comme racine évidente.
  On en déduit qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X) = (X+1)Q(X)$ où $\deg(Q) = 2$.
  (il était possible de déterminer Q par identification et de finir l'exercice en remarquant que Q admet deux racines évidentes)
- Le polynôme P admet aussi 2 comme racine évidente.
  Or, d'après l'égalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} P(2) & = & \underbrace{(2+1)} & Q(2) \\ \shortparallel & & \not\shortparallel & \\ 0 & & 0 & \end{array}$$

  Ainsi, $Q(2) = 0$ ce qui signifie que 2 est racine de Q.
  On en déduit qu'il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $Q(X) = (X-2)R(X)$ où $\deg(R) = 1$.

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$P(X) = (X+1)(X-2)R(X) \text{ où } R(X) = aX + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & X^3 - 3X - 2 \\ & = & (X+1)(X-2)(aX+b) \\ & = & (X^2 - X - 2)(aX+b) \\ & = & aX^3 + (-a+b)X^2 + (-2a-b)X - 2b \end{array}$$

En procédant par identification, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ -a + b = 0 \\ -2a - b = -3 \\ -2b = -2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{X^3 - 3X - 2 = (X+1)(X-2)(X+1) = (X+1)^2(X-2)}$$

□

6. Écrire sans valeur absolue l'expression $|-x^2 + 4x - 1| + |-5x - 10| + |3x - 2|$.

Démonstration.
Notons $q(x) = |-x^2 + 4x - 1| + |-5x - 10| + |3x - 2|$.

- Remarquons tout d'abord que $|-x^2 + 4x - 1| = |x^2 - 4x + 1|$.
  Notons $P(X) = X^2 - 4X + 1$. Ce polynôme a pour discriminant réduit : $\Delta' = (-2)^2 - 1 = 3$.
  Ainsi, P admet pour racines : $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.
  Comme $1 < 3 < 4$, on a : $1 < \sqrt{3} < 2$ et ainsi : $\quad 0 < x_1 < 1 \quad$ et $\quad 3 < x_2 < 4$.
- De même, $|-5x - 10| = |5x + 10|$.

Avant de résumer la situation dans un tableau, il reste à situer x_1 par rapport à $\frac{2}{3}$. Or :

$$x_1 < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3} > 1$$

La dernière inégalité est vérifiée puisque $\sqrt{3} > 1$. On en déduit que $x_1 < \frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		-2		x_1		$\frac{2}{3}$		x_2		$+\infty$
Signe de $x^2 - 4x + 1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Valeur de $\lvert x^2 - 4x + 1\rvert$		$x^2 - 4x + 1$		$x^2 - 4x + 1$	0	$-x^2 + 4x - 1$		$-x^2 + 4x - 1$		$x^2 - 4x + 1$	
Signe de $5x + 10$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Valeur de $\lvert 5x + 10\rvert$		$-5x - 10$		$5x + 10$		$5x + 10$	0	$5x + 10$		$5x + 10$	
Signe de $3x - 2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Valeur de $\lvert 3x - 2\rvert$		$-3x + 2$		$-3x + 2$		$-3x + 2$	0	$3x - 2$		$3x - 2$	
Valeur de $q(x)$		$x^2 - 12x - 7$		$x^2 - 2x + 13$		$-x^2 + 6x + 11$		$-x^2 + 12x + 7$		$x^2 + 4x + 9$	

□

7. Faire l'étude complète de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

Démonstration.

- La quantité $\sqrt{x - x^2}$ est définie si : $x - x^2 = x(1 - x) \geqslant 0$ *i.e.* si $x(x - 1) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est définie sur } \mathscr{D}_f = [0, 1].}$$

- Notons $u(x) = x - x^2$. La fonction f est dérivable sur tout ensemble E où :
  × u est dérivable. La fonction u étant polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  × u est strictement positive. Or $u(x) > 0$ pour tout $x \in \,]0, 1[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est dérivable sur }]0, 1[.}$$

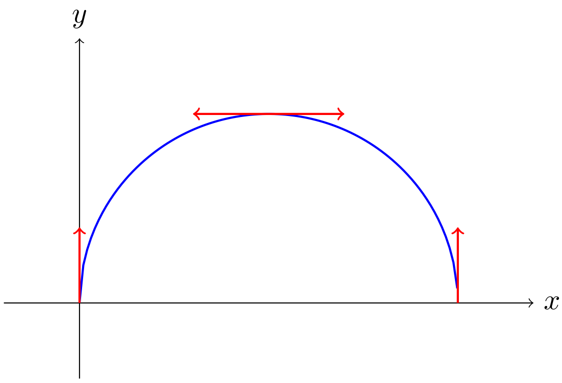
$$\boxed{\text{Et pour tout } x \in \,]0, 1[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}}$$

- Comme pour tout $x \in \,]0, 1[$, $\sqrt{x - x^2} > 0$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x$.

On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
Variations de f	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

- Au point d'abscisse 0 et au point d'abscisse 1, la fonction f admet une tangente verticale ($\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$).
- On en déduit la représentation graphique suivante.



□

Exercice 3

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation : $a^b = b^a$ où a et b sont des **entiers** strictement positifs tels que $a < b$.

1. Montrer que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à $f(a) = f(b)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Démonstration.
Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{array}{lll} & a^b = b^a & \\ \Leftrightarrow & \mathrm{e}^{b\ln(a)} = \mathrm{e}^{a\ln(b)} & \textit{(par définition)} \\ \Leftrightarrow & b\ln(a) = a\ln(b) & \textit{(par application de } \ln\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\ln(a)}{a} = \dfrac{\ln(b)}{b} & \\ \Leftrightarrow & f(a) = f(b) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } a^b = b^a \ \Leftrightarrow\ f(a) = f(b)}$$

□

2. Faire l'étude de la fonction f et dresser son tableau de variations (on admettra que sa limite quand x tend vers 0 vaut $-\infty$ et que sa limite quand x tend vers $+\infty$ vaut 0).
Tracer la courbe de f.
Montrer que f admet un maximum global en un point que l'on précisera.

Démonstration.

- La quantité $f(x)$ est définie :
  - × si la quantité $\ln(x)$ est définie *i.e.* si $x \in]0, +\infty[$,
  - × et si la quantité $\dfrac{1}{x}$ est définie *i.e.* si $x \neq 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est définie sur } \mathscr{D}_f =]0, +\infty[.}$$

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle le produit des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, dérivables sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0, +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.}$$

- Comme $x^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.
On en déduit le tableau de variations suivant.

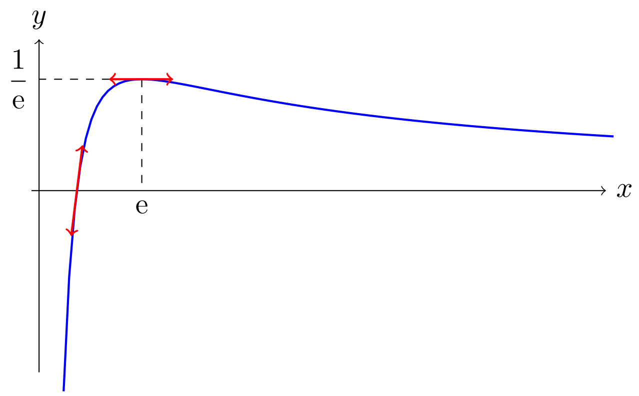
x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ atteint son maximum } \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ en } x = \mathrm{e}.}$$

- Au point d'abscisse 1, la fonction f admet pour tangente la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= x - 1 \end{aligned}$$

- On en déduit la représentation graphique suivante.



□

(pour plus de lisibilité, l'axe des abscisses et des ordonnées sont présentés avec une échelle différente)

3. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

Démonstration.
On souhaite trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(a) = f(b)$ et $a < b$. On cherche donc tous les couples d'entiers différents possédant la même image par f. Or d'après l'étude précédente :

× si $y > \frac{1}{e}$, y n'admet pas d'antécédent par f.

× si $y = \frac{1}{e}$, y admet un unique antécédent par f (il s'agit de e).

× si $0 < y < \frac{1}{e}$, y admet deux antécédents par f.
Le plus petit est situé dans l'intervalle $]1, e[$ et le plus grand est dans l'intervalle $]e, +\infty[$.

× si $y \leqslant 0$, y admet un unique antécédent par f.

On en déduit que a peut prendre toute valeur entière de l'intervalle $]1, e[$.

$$\boxed{\text{Comme } e \simeq 2,71, \text{ la seule valeur possible est } a = 2.}$$

□

4. Résoudre l'équation $1^b = b^1$.

Démonstration.
Pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, on a : $1^b = 1$ et $b^1 = 1$. Ainsi : $1^b = b^1 \Leftrightarrow b = 1$.

$$\boxed{\text{L'équation } 1^b = b^1 \text{ admet comme unique solution } b = 1.}$$

□

5. Résoudre l'équation $2^b = b^2$.

Démonstration.
Ici, on a fixé $a = 2$ et on cherche les solutions entières $b \neq 2$ à l'équation : $f(2) = f(b)$.
D'après l'étude précédente, si b existe, il est unique et situé dans l'intervalle $]e, +\infty[$.

- Si $b = 3$, on a : $2^b = 2^3 = 8 \neq 9 = 3^2 = b^2$.
- Si $b = 4$, on a : $2^b = 2^4 = 16 \;=\; 16 = 4^2 = b^2$.

$$\boxed{\text{L'équation } 2^b = b^2 \text{ admet comme unique solution } b = 4.}$$

□

6. Conclure en donnant l'ensemble de tous les couples (a, b) où a et b sont des entiers strictement positifs vérifiant $a^b = b^a$ et $a < b$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{L'équation } a^b = b^a \text{ admet comme unique couple entier solution le couple } (2, 4).}$$

□

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x + 2}$.
On note h la fonction définie sur ce même intervalle par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Étudier les variations de h. En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$.

Démonstration.

- Tout d'abord notons que :

  × la quantité $\ln(1 + x)$ est définie lorsque $x + 1 > 0$ *i.e.* $x > -1$,

× la quantité $\dfrac{1}{x+2}$ est définie lorsque $x \neq -2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } h \text{ est définie sur } \mathscr{D}_h = \,]-1, +\infty[.}$$

L'énoncé restreint l'intervalle de définition de f et g à $[0, +\infty[$.
Par la suite, on se limitera donc à cet intervalle.

- La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ car f et g sont dérivables sur cet intervalle.
  De plus, pour $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x+2)^2}{(1+x)(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+4x+4-4x-4}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Comme } \frac{x^2}{(x+2)^2} \geqslant 0,\ h'(x) \text{ est du signe de } x+1.}$$

- On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	0 $\qquad$ $+$
Variations de h	0 $\nearrow$ $+\infty$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \geqslant 0,\ h(x) \geqslant 0.}$$

□

2. Montrer que les courbes représentatives de f et g admettent une tangente commune en $x = 0$.

Démonstration.

- Au point d'abscisse 0, la courbe représentative de f admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{1+0}x + \ln(1+0) = x$$

- Au point d'abscisse 0, la courbe représentative de g admet pour tangente la droite d'équation :

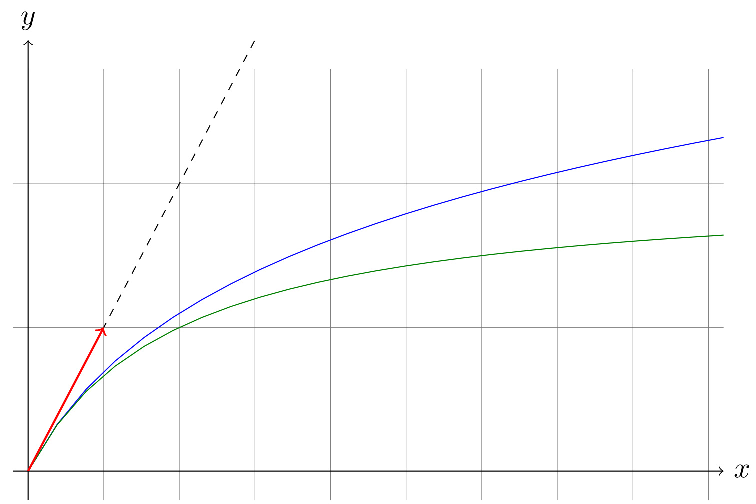
$$y = g'(0)(x-0) + g(0) = \frac{4}{(0+2)^4}x + \frac{0}{0+2} = x$$

$$\boxed{\text{Au point d'abscisse 0, les courbes représentatives de } f \text{ et } g \text{ admettent pour tangente la droite d'équation } y = 0.}$$

□

3. Tracer dans un même repère les deux courbes ainsi que la tangente en question.

Démonstration.



□

4. On définit désormais, pour tout réel α strictement positif, la fonction f_α par : $f_\alpha(x) = \ln(1+x) - \alpha x$.
Étudier les variations de la fonction f_1.

Démonstration.

- Par le même argument que précédemment, f_1 est définie sur $\boxed{\mathscr{D}_{f_1} =]-1,+\infty[}$.

  Par la suite, on se limite à l'intervalle $[0,+\infty[$.
- La fonction f_1 est dérivable sur $[0,+\infty[$.
  De plus, pour $x \in [0,+\infty[$, on a :

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - x}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

$$\boxed{\text{Comme } x \geqslant 0 \text{ et } 1+x \geqslant 0,\ f_1'(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in [0,+\infty[.}$$

- On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	0 $\quad -$	
Variations de f_1	0 ↘	$-\infty$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \geqslant 0,\ f_1(x) \leqslant 0.}$$

□

5. Montrer que si $\alpha \geqslant 1$, on a : $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \leqslant \alpha x$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$. D'après la question précédente, on a : $f_1(x) = \ln(1+x) - x \leqslant 0$. Ainsi, $\ln(1+x) \leqslant x$.

$$\boxed{\text{On en déduit que si } \alpha \geqslant 1, \text{ on a : } \forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \ln(1+x) \leqslant x \leqslant \alpha x}$$

□

6. Existe-t-il des $\alpha \in \,]0,1[$ tels que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \leqslant \alpha x$?

Démonstration.
Soit $\alpha \in \,]0,1[$. Étudions la fonction f_α.

- Par le même argument que précédemment, f_α est définie sur $\boxed{\mathscr{D}_{f_1} = \,]-1,+\infty[}$.
  Par la suite, on se limite à l'intervalle $[0,+\infty[$.
- La fonction f_α est dérivable sur $[0,+\infty[$.
  De plus, pour $x \in\ [0,+\infty[$, on a :

$$f'_\alpha(x) \ = \ \frac{1}{1+x} - \alpha \ = \ \frac{1}{1+x} - \alpha\frac{1+x}{1+x} \ = \ \frac{1-\alpha-\alpha x}{1+x}$$

  Comme $1+x \geqslant 0$, $f'_\alpha(x)$ est du signe de $1-\alpha-\alpha x$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.
  De plus, on a : $1-\alpha-\alpha x = 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha x = 1-\alpha \ \Leftrightarrow\ x = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.
  Il convient enfin de remarquer que : $\dfrac{1-\alpha}{\alpha} > 0$ puisque $1-\alpha > 0$ (car $\alpha < 1$) et $\alpha > 0$.
- On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		$\frac{1-\alpha}{\alpha}$		$+\infty$
Signe de $f'_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_1	0	$\nearrow$	$f_\alpha(\frac{1-\alpha}{\alpha})$	$\searrow$	$-\infty$

- D'après ce tableau de variations, $f_\alpha(x) > 0$ pour tout $x \in \,]0, \frac{1-\alpha}{\alpha}]$.
  Ce qui revient à dire que : $f(x) > \alpha x$.

$\boxed{\text{On en déduit qu'il n'existe pas d'élément } \alpha \in \,]0,1[\text{ tel que : } \forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \leqslant \alpha x.}$ □